

第二批国家级一流本科课程申报书
(线下课程)

课程名称：理论力学 B

专业类代码：0801

课程负责人：刘舟

联系电话：13892837561

申报学校：西安航空学院

填表日期：2021 年 5 月

推荐单位：陕西省教育厅

中华人民共和国教育部制

二〇二一年四月

填报说明

1.专业类代码指《普通高等学校本科专业目录（2020）》中的专业类代码（四位数字）。

2.以课程团队名义申报的，课程负责人为课程团队牵头人；以个人名义申报的，课程负责人为该课程主讲教师。团队主要成员一般为近5年内讲授该课程教师。

3.申报课程名称、所有团队主要成员须与教务系统中已完成的学期一致，并须截图上传教务系统中课程开设信息。

4.文中○为单选；□可多选。

5.文本中的中外文名词第一次出现时，要写清全称和缩写，再次出现时可以使用缩写。

6.具有防伪标识的申报书及申报材料由推荐单位打印留存备查，国家级评审以网络提交的电子版为准。

7.涉密课程或不能公开个人信息的涉密人员不得参与申报。

一、课程基本信息

课程名称	理论力学 B	是否曾被推荐	<input type="radio"/> 是 <input checked="" type="radio"/> 否
课程负责人	刘舟		
负责人所在单位	机械工程学院		
课程编码+选课编码 (教务系统中的编码)	B1102T030513.01- B1102T030513.19		
课程分类	<input type="radio"/> 通识课 <input type="radio"/> 公共基础课 <input checked="" type="radio"/> 专业课		
	<input type="checkbox"/> 思想政治理论课 <input checked="" type="checkbox"/> 创新创业教育课 <input type="checkbox"/> 教师教育课 <input type="checkbox"/> 实验课		
课程性质	<input checked="" type="radio"/> 必修 <input type="radio"/> 选修		
开课年级	二年级		
面向专业	机械设计、机械电子、机器人工程；飞行器设计、飞行器制造、飞行器动力；车辆工程；		
学 时	48		
学 分	3		
先修（前序）课程名称	高等数学，大学物理		
后续课程名称	材料力学，机械原理，机械设计		
主要教材	理论力学、978-7-5606-4180-5、张功学、西安电子科技大学出版社、2016		
最近两期开课时间	2019年9月2日—2019年12月22日，理论力学B，任晓辉、孟卓、康海、赵银燕		
	2020年9月7日—2020年12月25日，理论力学B，刘舟、任晓辉、闫蕊、张凯、孙涛		
最近两期学生人数	949人		

注：2020年春季学期，因受新冠肺炎疫情影响而采用在线方式进行授课的，如符合教改设计理念并取得预期效果，可视为完成一个教学周期；教务系统截图须至少包含课程编码、选课编码、开课时间、授课教师姓名等信息。

二、授课教师（教学团队）

课程团队主要成员（序号1为课程负责人，总人数限5人之内）								
序号	姓名	出生年月	单位	职务	职称	手机号码	电子邮箱	授课任务
1	刘舟	1971.11	机械		教授	13892837561	xhliuzhou@163.com	主讲教师
2	任晓辉	1977.2	机械		教授	17782801183	xiaohuiren2002@163.com	主讲教师

3	孟卓	1975.12	机械		讲师	15002918619	mengzhuo_068@mail.nwpu.edu.cn	主讲教师
4	闫蕊	1986.12	机械		副教授	13759957159	yan_ruihappy@126.com	主讲教师
5	孙涛	1983.03	机械		讲师	15929773253	271052118@qq.com	主讲教师

课程负责人和团队其他主要成员教学情况（500字以内）

（教学经历：近5年来在承担该门课程教学任务、开展教学研究、获得教学奖励方面的情况）

近5年来，课程负责人主讲理论力学、材料力学、工程力学等课程，学年授课400余课时，指导25位本科生的毕业设计。教学中根据我校学生实际情况因地制宜、因材施教，选择灵活多样的方法进行教学，努力提高教学水平和教学质量，连续10年获得学校“教学质量优秀奖”，目前主持在研质量工程1项。

教学团队其他成员都具有博士学位，年龄结构合理。近5年主持校级教改项目2项（结题），质量工程项目2项（结题）。目前主持在研质量工程1项，获得学校“教学质量优秀奖”两次。坚持以教科研为先导，主持国家青年基金项目1项，省级基金项目1项，横向课题两项，提高教学的针对性和时效性。

认真探索应用型本科院校中学科竞赛对教学的支持途径。教学团队组织、辅导我校本科生参加第十一、十二届全国周培源大学生力学竞赛，获得良好成绩；团队成员指导大创项目8项，机器人竞赛获二等奖2次。

三、课程目标（300字以内）

（结合本校办学定位、学生情况、专业人才培养要求，具体描述学习本课程后应该达到的知识、能力水平）

通过课程学习，培养学生对机械运动规律认知和表述能力、建模分析计算能力，具备应用型人才培养目标能力，养成工程师素质。学生能够掌握物体系统受力分析，会应用平衡方程求解未知力。掌握点和刚体的运动学分析方法，对运动参数进行定量分析和计算。掌握质点、质点系统动力学方法。为将来研究解决复杂工程问题和学习新的科学技术创造条件。

课程建设将注重知识、能力、素质的有机融合，培养学生解决复杂问题的综合能力和高级思维。课程内容反映前沿性和时代性，贯彻课程思政，合理采用多种教学形式，增强互动。合理提升课程挑战度、增加课程难度、拓展课程深度，在能够解决简单工程问题的基础上，培养解决复杂问题的综合能力。

四、课程建设及应用情况（2000 字以内）

（本课程的建设发展历程，课程与教学改革要解决的重点问题，课程内容与资源建设及应用情况，课程教学内容及组织实施情况，课程成绩评定方式，课程评价及改革成效等情况）

理论力学是研究物体机械运动一般规律的科学，是各力学学科分支的基础，是众多工程技术学科的基础。课程对培养学生分析和解决工程实践力学问题的能力，以及后续课程的教学具有重要作用，其课程建设、教学改革和教学效果的好坏将直接影响到后续课程的学习及工程技术人才培养的质量。我校多个专业应用型人才培养目标均对理论力学课程提出高支撑度要求。

2004 年，我校工程力学（专科时期理论力学、材料力学合并讲授）就获批省级精品课程。升格本科后，理论力学立项校级重点课程建设项目，2018 年结题验收。随着教学改革的深入开展，理论力学 48 学时全部为课堂讲授，但部分内容安排在实验室实施教学。课堂讲授注重增大信息量，强化知识点，有效利用网络教学资源，通过精讲多练，改进教学方法，使学生能够比较牢固地掌握理论力学基本知识。

1、教学资源建设

根据相关专业人才培养目标，确定教学大纲，课程团队统一执行。制作授课课件 3 套，分发团队教师优选课件授课；完成教学案例 8 例，上传网络，同时在课堂教学中选择使用；完成试题库建设，题型多样，共计 700 余道题目；编写理论力学应用型教材，稿件正在统一排版完善；完成《理论力学实验指导书》，筹划开设理论力学实验课程。培养青年教师，组成教学科研并重、结构合理的教学团队（80%教师具有博士学位），申报多个教改项目、质量工程项目，并将研究成果应用于教学活动。

2、课程内容

课程基本内容包括静力学（20 课时）、运动学（18 课时）、动力学（10 课时）。

静力学要求能够绘制物系和构件的受力图；完成力系的简化和分析、应用平衡条件求解平面力系问题；能够完成考虑摩擦时简单物系平衡问题的求解。

运动学要求能够运用直角坐标和弧坐标法求点的运动轨迹、速度、加速度；能够分析刚体基本运动的特征；能够应用点运动合成与分解的基本概念和方法求解速度和加速度；能运用基点法，瞬心法和速度投影定理等方法求解与平面图形上各点速度有关的问题、对常见的机构进行速度和加速度分析。

动力学要求能够应用质点运动微分方程分析质点动力学的两类问题；能够应用刚体绕定轴转动方程解决转动刚体的动力学问题；能够应用动能定理求解质点系的动力学问题。

3、考核评价方法

结课考查学生分析和解决力学问题的能力、理论联系实际的能力，强调学生创新素质、科学态度以及自学能力培养。理论考试卷面成绩按照百分制评分，总评后折算为 70 分。平时成绩包括作业、考勤、项目等，期末总评后折算，共计

30分。

经过课程学习，学生应当具备对工程中的静力学、运动学和动力学问题进行正确的力学建模、解释和分析的能力。在教师引导下逐步学会从前人研究问题、分析问题的过程、演绎推导的结果中，体会和领悟这些人类高级心智文明的成果，使学生自己真正学懂力学，而不是被“教会”力学；同时希望学生通过研究、探索乃至犯错误的过程中，培养从错综复杂的现象和繁杂无序的结果中寻找与总结内在关系和规律的能力，并且体会科学研究的艰辛和乐趣，锻炼百折不挠、持之以恒的毅力和意志，提高开展科技活动和社会实践的能力。

4、新型教学手段应用

探索适应新时代大学生学习习惯的途径是教师不可推卸的责任。“新瓶装老酒”、“投其所好”才能取得更好的教学效果。课程突出应用型人才培养需求，突出航空特色，有效提高人才培养质量。

课堂教学中，使用“雨课堂”、“学习通”等平台辅助教学，完成学习情况调研、学习资料推送等功能，结合混合式教学，提高教学质量。考虑到学生特点和“手机生活”时代，建设微信公众号“西航力学 style”和学习博客（新浪博客），内容同步发送，适应学生手机浏览、讨论、答疑。

课程定位明确，与前导、后续课程衔接得当。合理安排教学内容，通过模拟、抽象工程实践建立力学模型，编写、制作优秀教学案例，融知识传授、能力培养、素质教育于一体，结合课程思政，培养符合行业应用型人才需求的力学素养。

课程的资源具有较好的共享能力，可对社会学习者自学提供有益帮助。

五、课程特色与创新（500字以内）

（概述本课程的特色及教学改革创新点）

力学学习是素质教育的有效途径，使学生在逻辑思维、抽象化能力、自学能力、表达能力以及数学计算能力等方面得到培养和提高。

1. 突出航空特色，合理取舍教学内容。课程选择航空工程实际案例引导教学，重视前沿性和时代性，重点培养应用能力，兼顾素质养成，坚持知识、能力、素质有机融合，培养解决问题的能力 and 思维。

2. 贯彻 OBE 理念，科学设计教学环节。贯彻“以学生为主体，教师为指导”的教学理念，重视教学形式的先进性和互动性，及时引进前沿问题，将教师的相关科研成果引入教学。

3. 竞赛驱动教学，提高课程挑战性。编写适合人才培养目标和培养定位的教材与教学指导书，开展理论力学实验课程建设，有力支持全国大学生力学竞赛。

4. 强化案例教学，理论联系实际。素材和案例选择注重时效，强调互动性提高学生积极性，促进工程师素质养成。课程通过网络教学平台、博客、微信公众号公开发布，作为学生学习参考，提高学生学习能动性，同时服务社会。

5. 明确课程定位，培养符合行业应用型人才需求的力学素养。合理分配教学时数，融知识传授、能力培养、素质教育于一体，学习结果具有探究性和个性化。

六、课程建设计划（500 字以内）

（今后五年课程的持续建设计划、需要进一步解决的问题，改革方向和改进措施等）

理论力学是相关专业应用型人才培养目标的高支撑度课程，需要一流教学方法、一流教材、一流评价体系为保障。在今后五年内持续努力，建设符合应用型人才培养目标、教学方法先进有效、教学手段多样、教学效果良好的优秀课程，为学生工程师素质养成奠定良好基础，支持“立足陕西，服务航空，面向西部，辐射全国”的办学定位，为航空工业和地方经济建设、社会发展做出贡献。

1. 持续教学案例建设，突出航空特色。坚持知识、能力、素质有机融合，培养分析质疑、勇于创新的精神和能力，贯彻课程思政，及时将学术研究、科技发展前沿成果引入课程；

2. 编写贴合专业的应用型教材（目前正在统稿），优化教学内容，坚持应用驱动，突出航空特色，贯彻 OBE 理念；

3. 逐步建设线上教学资源，现代信息技术与教学深度融合，激发学生学习兴趣，积极引导學生进行探究式、个性化学习；

4. 开展理论力学实验课程建设，结合全国大学生力学竞赛，重视知识应用，提高课程挑战性，提高教师教学能力和水平；

5. 严格考核考试评价，引导学生增加投入学习的时间，提高自主学习时间比例，强化学生经过刻苦学习收获能力和素质提高的成就感；

6. 教学资源注重共享，课内课外有机结合，同时服务社会。

七、附件材料清单

1. 课程负责人和团队成员的 10 分钟“说课”视频

[含课程概述、教学设计思路、教学环境（课堂或线上或实践）、教学方法、创新特色、教学效果评价与比较等。技术要求：分辨率 720P 及以上，MP4 格式，图像清晰稳定，声音清楚。视频中标注出镜人姓名、单位，课程负责人出镜时间不得少于 3 分钟。“说课”使用的语言及字幕为国家通用语言及文字。]

2. 教学设计样例说明

（提供一节代表性课程的完整教学设计和教学实施流程说明，尽可能细致地反映出教师的思考和教学设计，在文档中应提供不少于 5 张教学活动的图片。要求教学设计样例应具有较强的可读性，表述清晰流畅。课程负责人签字。）

3. 最近一学期的教学日历

（申报学校教务处盖章。）

4. 最近一学期的测验、考试（考核）及答案（成果等）

（申报学校教务处盖章。）

5. 最近两学期的学生成绩分布统计

(申报学校教务处盖章。)

6. 最近一学期的课程教案

(课程负责人签字。)

7. 最近一学期学生评教结果统计

(申报学校教务处盖章。)

8. 最近一次学校对课堂教学评价

(申报学校教务处盖章。)

9. 教学(课堂或实践)实录视频

提供完整的一节课堂实录视频(标注课程内容、课程对象、上课时间以及上课地点,至少40分钟。技术要求:分辨率720P及以上,MP4格式,图像清晰稳定,声音清楚。教师必须出镜,视频中需标注教师姓名、单位;要有学生的镜头,并须告知学生可能出现在视频中,此视频会公开。少数民族语言视频须配国家通用语言字幕。)

10. 课程团队成员和课程内容政治审查意见

(申报课程高校党委负责对本校课程团队成员以及申报课程的内容进行政审,出具政审意见并加盖党委印章;团队成员涉及多校时,各校党委分别对本校人员出具意见;非高校成员由其所在单位党组织出具意见。团队成员政审意见内容包括政治表现、是否存在违法违纪记录、师德师风、学术不端、五年内是否出现过重大教学事故等问题;课程内容审查包括价值取向是否正确,对于我国政治制度以及党的理论、路线、方针、政策等理解和表述是否准确无误,对于国家主权、领土表述及标注是否准确,等等。)

11. 课程内容学术性评价意见

[由学校学术性组织(校教指委或学术委员会等),或相关部门组织的相应学科专业领域专家(不少于3名)组成的学术审查小组,经一定程序评价后出具。须由学术性组织盖章或学术审查小组全部专家签字。无统一格式要求。]

12. 其他材料,不超过2份(选择性提供)

以上材料均可能在网上公开,请严格审查,确保不违反有关法律及保密规定。

教材



教材版权页

内 容 简 介

本书是根据我国高等教育最新培养计划中理论力学课程的内容要求组织编写的。考虑到机械大类专业本科生源的实际情况,在保证基础的前提下,教材编写时涉及了诸多工程实际,以强化学生工程应用能力的培养。

全书包含静力学、运动学、动力学3篇,共14章内容。静力学部分包括静力学的基本概念与物体的受力分析、平面基本力系、平面任意力系及空间力系等4章内容;运动学部分包括运动学基础、点的合成运动及刚体的平面运动等3章内容;动力学部分包括质点动力学、动量定理及其应用、动量矩定理及其应用、动能定理及其应用、达朗贝尔原理(动静法)及其应用、虚位移原理(静动法)及其应用及机械振动基础等7章内容。每章后均配有相应的思考题与习题,全书最后附有习题答案。本课程推荐学时数为56~80学时。

本教材适于工程型本科机械、包装、土木、航空航天、装备、制造、地质、采矿、冶金、材料等专业学生学习之用。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/张功学主编. —2版.

—西安:西安电子科技大学出版社,2016.8(2018.11重印)

高等学校机械设计制造及其自动化专业“十三五”规划教材

ISBN 978-7-5606-4180-5

I. ①理… II. ①张… III. ①理论力学—高等学校—教材 IV. ①O31

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第168374号

策 划 马乐惠

责任编辑 陈 婷 马乐惠

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2016年8月第2版 2018年11月第6次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印 张 20

字 数 472千字

印 数 14 001~17 000册

定 价 38.00元

ISBN 978-7-5606-4180-5/O

XDUP 4472002-6

*** 如有印装问题可调换 ***

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

2019-2020-1 教务系统截图



西安航空学院
Xian Aeronautical University

教务管理系统

我的账户 刘东(199701001) 航空教学项目 管理员 切换 返回首页 退出

教学管理 学生工作 教职工

开课系统填报

开课情况: 全部 2019-2020学年1学期 切换学期

修改 批量修改 高级选项... 导出 打印 提交审核 恢复开课

序号	课程代码	课程名称	课程类别	教学班	教师	实际	上限	分组数	学分	课程模块	课程性质	考核方式	是否单招	学时/周	起止周	审核状态
		理论力学B														
<input type="checkbox"/>	B0210470.01	理论力学B	专业课	班级: 飞行器设计181	孟卓	31	33	0	3	科学与技术基础教 育课	必修	考试	否	48/4	1-12	通过
<input type="checkbox"/>	B0210470.02	理论力学B	专业课	班级: 飞行器设计182	孟卓	36	34	0	3	科学与技术基础教 育课	必修	考试	否	48/4	1-12	通过
<input type="checkbox"/>	B0210470.03	理论力学B	专业课	班级: 飞行器制造182	任晓辉	31	30	0	3	科学与技术基础教 育课	必修	考试	否	48/4	1-12	通过
<input type="checkbox"/>	B0210470.04	理论力学B	专业课	班级: 飞行器制造181	任晓辉	39	36	0	3	科学与技术基础教 育课	必修	考试	否	48/4	1-12	通过
<input type="checkbox"/>	B0210470.05	理论力学B	专业课	班级: 飞行器动力182	任晓辉	35	34	0	3	科学与技术基础教 育课	必修	考试	否	48/4	1-12	通过
<input type="checkbox"/>	B0210470.06	理论力学B	专业课	班级: 飞行器动力181	任晓辉	37	35	0	3	科学与技术基础教 育课	必修	考试	否	48/4	1-12	通过
<input type="checkbox"/>	B0210470.07	理论力学B	专业课	班级: 车辆工程181	赵银燕	40	35	0	3	专业教育课	必修	考试	否	48/3	1-16	通过
<input type="checkbox"/>	B0210470.08	理论力学B	专业课	班级: 车辆工程182	康海	34	34	0	3	专业教育课	必修	考试	否	48/3	1-16	通过
<input type="checkbox"/>	B0210470.09	理论力学B	专业课	班级: 车辆工程183	康海	33	35	0	3	专业教育课	必修	考试	否	48/3	1-16	通过

开课系统填报

任务统计

开课管理

选课管理

成绩管理

教材管理

2020-2021-1 教务系统截图

课程号	课程名称	课程类别	教师	实际	上限	学分	课程模块	课程性质	是否必修	学时/周	起止周	审核状态
B0210470.01	理论力学B	必修类	任晓峰	1	3	0		必修	否	24/1.5	1-20	通过
B0210470.02	理论力学B	必修类	任晓峰	2	5	0		必修	否	24/1.5	1-20	通过
B0210470.03	理论力学B	必修类	任晓峰	9	11	0		必修	否	24/2	5-16	通过
B0210470.04	理论力学B	必修类	任晓峰	12	15	0		必修	否	24/1.5	1-20	通过
B11027030513.01	理论力学B	专业类	任晓峰	35	34	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.02	理论力学B	专业类	任晓峰	33	31	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.03	理论力学B	专业类	任晓峰	31	33	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.04	理论力学B	专业类	任晓峰	31	31	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.05	理论力学B	专业类	张帆	39	33	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.06	理论力学B	专业类	张帆	37	35	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.07	理论力学B	专业类	张帆	33	34	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.08	理论力学B	专业类	张帆	34	33	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.09	理论力学B	专业类	孙涛	36	33	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.10	理论力学B	专业类	孙涛	42	45	0		必修	否	48/4	4-14,16	通过
B11027030513.11	理论力学B	专业类	孙涛	41	42	0		必修	否	48/4	4-14,16	通过
B11027030513.12	理论力学B	专业类	刘丹	29	32	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.13	理论力学B	专业类	刘丹	31	32	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.14	理论力学B	专业类	刘丹	30	30	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.15	理论力学B	专业类	刘丹	30	31	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.16	理论力学B	专业类	孙涛	34	34	0		必修	否	48/4	1-12	通过

课程管理

培养方案

教学计划

教学任务

任务查询

上课系任务

开课院系报

任务统计

排课管理

选课管理

教务管理系统

Xi'an Aeronautical University

我的账户

返回首页

退出

教学管理

学生工作

教职工

排课情况: 全部

学年学期: 2020-2021学年1学期

开课院系: 全部

课程名称: 理论力学B

课程代码: B11027030513.17

课程类别: 专业类

开课院系: 全部

是否排课: 是

考核方式: 考试

教师: 孙涛

开课院系信息

排课情况: 全部

学年学期: 2020-2021学年1学期

开课院系: 全部

课程名称: 理论力学B

课程代码: B11027030513.17

课程类别: 专业类

开课院系: 全部

是否排课: 是

考核方式: 考试

教师: 孙涛

教师: 孙涛

课程名称: 理论力学B

课程代码: B11027030513.17

课程类别: 专业类

开课院系: 全部

是否排课: 是

考核方式: 考试

教师: 孙涛

课程号	课程名称	课程类别	教师	实际	上限	学分	课程模块	课程性质	是否必修	学时/周	起止周	审核状态
B11027030513.17	理论力学B	专业类	孙涛	34	33	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.18	理论力学B	专业类	孙涛	34	33	0		必修	否	48/4	1-12	通过
B11027030513.19	理论力学B	专业类	刘丹	34	34	0		必修	否	48/4	1-12	通过

2.教学设计样例说明

教 案

理论力学 B 课 十四 讲

主讲人 刘 舟

课 题 点的复合运动

目的任务 掌握三种运动概念

掌握速度合成定理

重点难点 1、动点动系选择

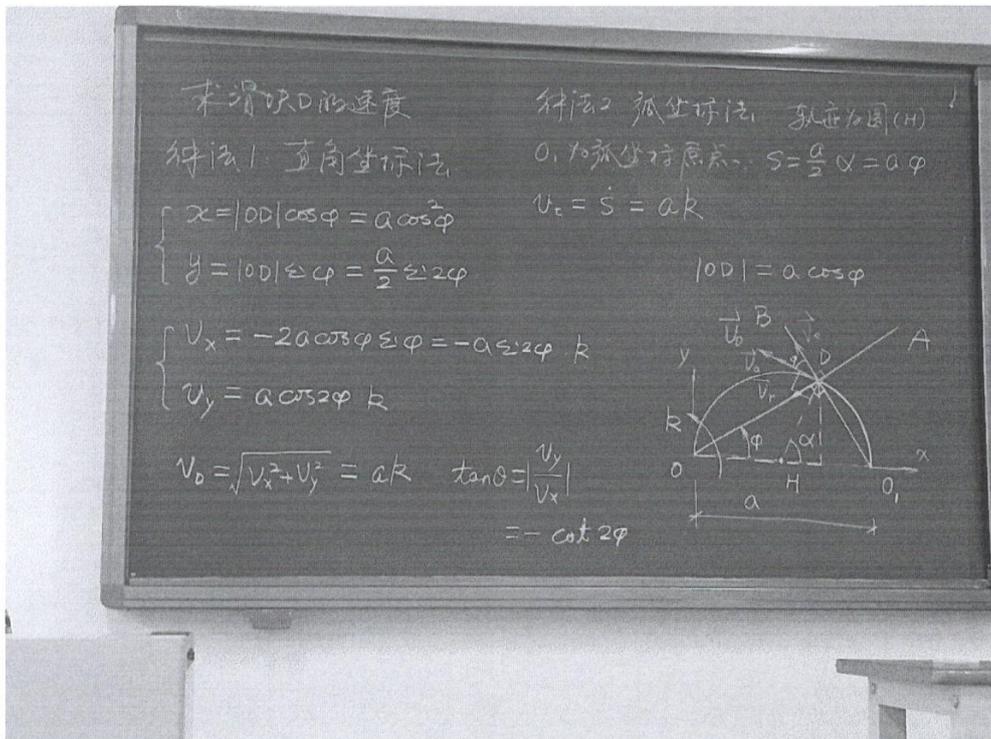
2、速度合成定理

教学方法 多媒体、雨课堂、板书讲授

教学组织

回归前述内容：运动方程、速度、加速度；(3分钟)

课堂习题讲解：十字滑块的速度分析，使用点的运动知识：(10分钟)



运动的绝对性与相对性？(2分钟) 导入新课：

刘舟

1、三种坐标系 (5 分钟)

2、三种运动

● 建立三种运动、速度、加速度概念，重点讲清牵连运动和牵连点、牵连速度及牵连加速度；(10 分钟)

● 板书图示三种运动及其速度加速度；(3 分钟)

填空题 5分 设置

动点 [填空1]，动系 [填空2]
绝对运动为 [填空3]；
相对运动为 [填空4]；
牵连运动为 [填空5]；



正常使用填空题3.0以上版本雨课堂

作答 <http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

● 雨课堂习题检测学生掌握情况；(2 分钟)

3、速度合成定理

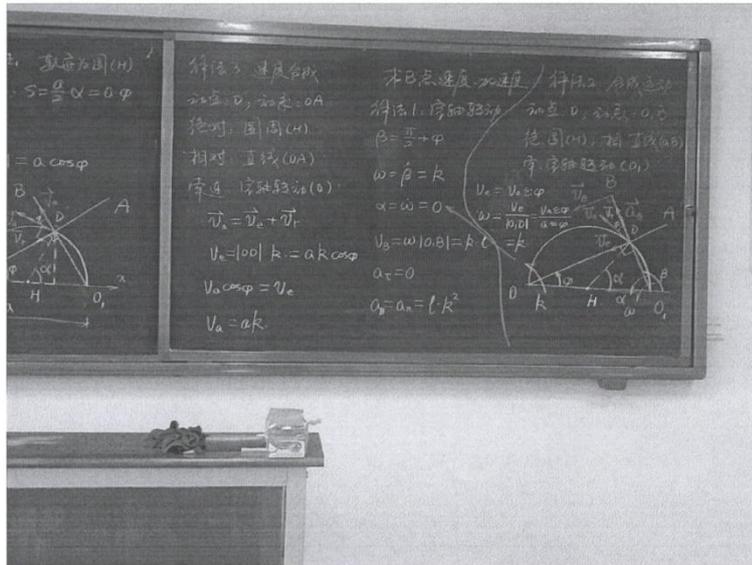
● 推导，应用思路 (10 分钟)第一小节结束



刘舟

4、速度合成定理应用

- 例题 6-1, 投影法及矢量法; (10 分钟)
- 例题 6-2; (7 分钟)
- 应用过程思路强调; (2 分钟)
- 其他例题讲解思路; (18 分钟)
- 课前习题讲解, 点的复合运动方法: (5 分钟)



课堂小结 1、三种运动、速度、加速度;

2、速度合成定理及两种求解方法; (3 分钟)

提问作业 6-4



刘勇

一流本科课程申报课程教学日历 (2021)

申报学校 (盖章): 西安航空学院



课程名称: 理论力学B

课程负责人: 刘舟

序号	日期	周次	讲次	学时 (分钟)	教学内容 (要点)	授课地点	学生人数	教学形式
1	2020.9.7	1	1	2 (90分钟)	绪论, 了解理论力学学习内容, 建立静力学模型	阎教D1436	31	线下理论讲授
2	2020.9.11	1	2	2 (90分钟)	力的概念, 理解静力学公理, 掌握常见约束类型	阎教D1436	31	线下理论讲授, 线上练习
3	2020.9.14	2	3	2 (90分钟)	掌握物体的受力分析和受力图的画法	阎教D1436	31	线下讲授、讨论、练习
4	2020.9.18	2	4	2 (90分钟)	平面汇交力系合成与平衡, 掌握几何法、解析法	阎教D1436	31	线下理论讲授, 线上练习
5	2020.9.21	3	5	2 (90分钟)	平面力对点之矩及力偶系, 掌握力矩概念、合力矩定理和平面力偶系	阎教D1436	31	线下理论讲授, 线上练习
6	2020.9.25	3	6	2 (90分钟)	力系等效与简化, 掌握平移定理, 力系简化结果及其应用	阎教D1436	31	线下讲授、讨论
7	2020.9.26	4	7	2 (90分钟)	平面任意力系的平衡计算	阎教D1436	31	线下理论讲授, 线上练习
8	2020.9.28	4	8	2 (90分钟)	物体系统平衡平衡方程及应用	阎教D1436	31	线下理论讲授, 讨论、线上练习
9	2020.10.8	5	9	2 (90分钟)	建立摩擦概念, 理解摩擦平衡问题	阎教D1436	31	线下讲授、讨论
10	2020.10.9	5	10	2 (90分钟)	空间力系, 建立投影、力矩概念, 理解平衡方程	阎教D1436	31	线下讲授、讨论
11	2020.10.12	6	11	2 (90分钟)	运动学基础, 掌握点的运动学	阎教D1436	31	线下讲授、讨论
12	2020.10.16	6	12	2 (90分钟)	运动学基础, 掌握平动与定轴转动特征	阎教D1436	31	线下讲授、讨论
13	2020.10.19	7	13	2 (90分钟)	运动学基础, 掌握平动与定轴转动速度与加速度的求解	阎教D1436	31	线下讲授、讨论、线上练习
14	2020.10.23	7	14	2 (90分钟)	点的合成运动, 建立三种运动概念, 掌握速度合成定理	阎教D1436	31	线下讲授、讨论、练习



15	2020.10.26	8	15	2 (90分钟)	点的加速度合成	阎教D1436	31	线下讲授、分组讨论、练习
16	2020.10.30	8	16	2 (90分钟)	点的合成运动 (习题课)	阎教D1436	31	线下讲授、讨论、练习
17	2020.11.2	9	17	2 (90分钟)	刚体平面运动方程, 理解刚体平面运动方程及其分解	阎教D1436	31	线下讲授、讨论
18	2020.11.6	9	18	2 (90分钟)	刚体平面运动速度分析, 掌握基点法、速度投影定理和瞬心法	阎教D1436	31	线下讲授、分组讨论、练习
19	2020.11.9	10	19	2 (90分钟)	刚体平面运动加速度分析, 掌握基点法求平面运动刚体的加速度	阎教D1436	31	线下讲授、讨论、练习
20	2020.11.13	10	20	2 (90分钟)	质点运动微分方程, 掌握牛顿第二定律	阎教D1436	31	线下讲授、讨论、练习
21	2020.11.16	11	21	2 (90分钟)	质心运动定理	阎教D1436	31	线下讲授、讨论、练习
22	2020.11.20	11	22	2 (90分钟)	刚体定轴转动微分方程	阎教D1436	31	线下讲授、讨论、练习
23	2020.11.23	12	23	2 (90分钟)	功与动能, 建立功与动能概念, 掌握常见力的功与动能	阎教D1436	31	线下讲授、练习
24	2020.11.27	12	24	2 (90分钟)	动能定理及其应用	阎教D1436	31	线下讲授、讨论、练习、教师提问并答疑



西安航空学院课程考试试卷

2020~2021 学年第 1 学期期末考试

理论力学 B 试卷 A

题号	一	二	三	四	五	总分	总分人
得分							
阅卷人							

适用班级：飞行器制造 191-194、飞行器设计 191-193、飞行器动力 191-192、机械电子 193B-194B&191-192、机器人工程 191-192、机械设计 191-194

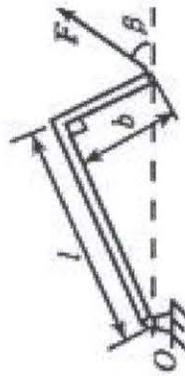
得分

一、填空题（每题 4 分，共 24 分）

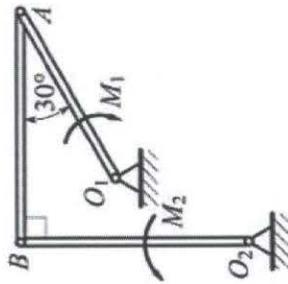
1. 平面力系向同平面内任一点简化结果都相同，则该力系最终简化结果可能是

_____或_____。

2. $M_O(F) =$ _____。



第 2 题图

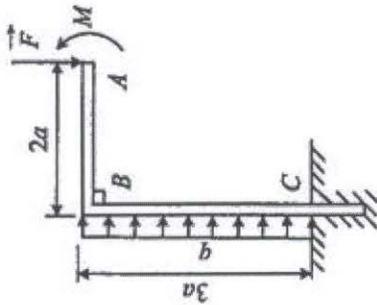


第 3 题图

3. 四连杆机构 O_1ABO_2 在图示位置平衡。 $O_1A = 0.4m$, $O_2B = 0.6m$ 。作用于杆 O_1A

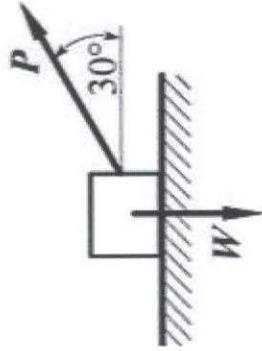
上的力偶矩 $M_1 = 100N \cdot m$ ，各杆自重不计。则 O_2 处反力为_____。

4. 图示直角弯杆 ABC 的 AB 段水平，BC 段铅直，各段长度分别为 $2a$ 和 $3a$ ，所作的载荷有集度为 q 的均布力、力偶矩 $M=qqa^2$ 的力偶以及铅垂力 $F = 2qa$ 。固定端 C 处的约束力偶为_____。



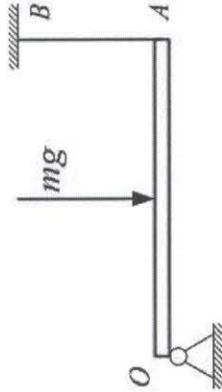
第 4 题图

5. 绳索以 $P = 100N$ 的拉力拉一重 $W = 500N$ 的物体，物体与地面之间的摩擦系数 $f_s = 0.2$ ，绳索与地面之间的夹角为 30° 。此时物体受到的摩擦力为_____。



第 5 题图

6. 匀质杆 OA 重力为 mg ，突然剪断绳索 AB 时杆的角加速度为_____。



第 6 题图

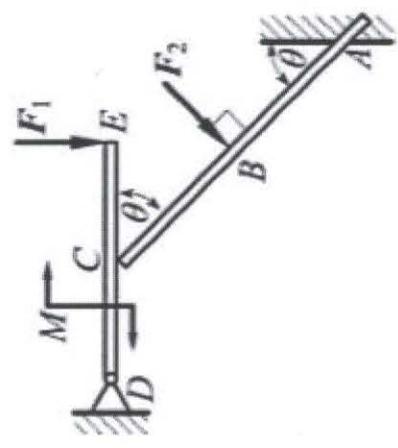


西安航空学院课程考试试卷

二、计算题 (4 小题, 共 76 分)

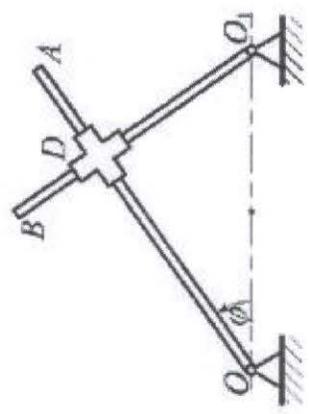
得分

7. 图示结构中不计各构件自重, C 处为光滑接触。 $F_1 = F_2 = 400\text{N}$, $M = 300\text{N} \cdot \text{m}$; $AB = BC = 400\text{mm}$, $DC = CE = 300\text{mm}$, $\theta = 45^\circ$, 求固定端 A 处和铰链 D 处的约束力。(20 分)



得分

8. 图示机构中 OA 和 O_1B 分别绕 O 和 O_1 轴转动, 用十字滑块 D 将两杆连接。运动过程中两杆保持垂直。已知 $OO_1 = a$, $\varphi = kt$, 式中 k 为常数。 $O_1B = l$, 求滑块 D 的速度、 B 点的速度和加速度。(16 分)

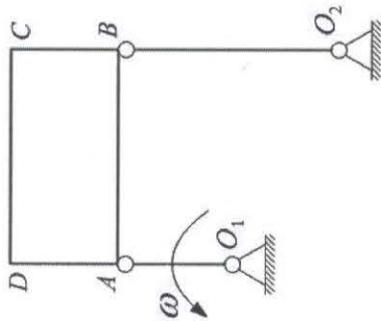




西安航空学院课程考试试卷

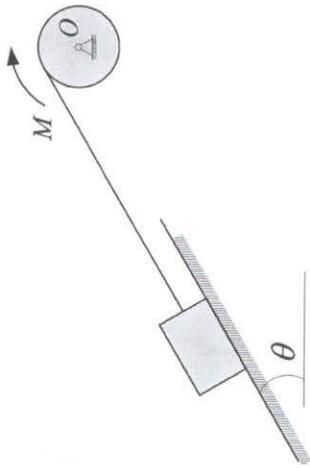
得分

9. 平面机构由 O_1A 和 O_2B 及矩形板 $ABCD$ 铰接而成, $O_1A = AD = r$, $O_2B = AB = 2r$ 。曲柄 O_1A 以匀角速度 ω 绕 O_1 轴转动, 图示瞬时 O_1A 、 O_2B 均与 AB 垂直。求此时点 C 的速度和加速度。(20 分)



得分

10. 不变力偶矩 M 作用在匀质鼓轮上, 轮半径为 r , 质量为 m , 绕在鼓轮上的绳索拉动质量为 m 的重物沿与水平面成 θ 角的斜面上行。系统初始静止, 重物对斜面的滑动摩擦系数为 f , 不计绳索自重。求鼓轮的角加速度和绳索的拉力。(20 分)





西安航空学院课程考试参考答案及评分标准

2020~2021 学年第 1 学期期末考试

理论力学 B 试卷 A

题号	一	二	三	四	五	总分	总分人
得分							
阅卷人							

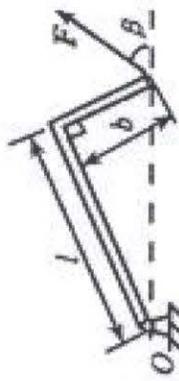
适用班级: 飞行器制造 191-194、飞行器设计 191-193、飞行器动力 191-192、机械电子 193B-194B&191-192、机器人工程 191-192、机械设计 191-194

得分

一、填空题 (每题 4 分, 共 24 分)

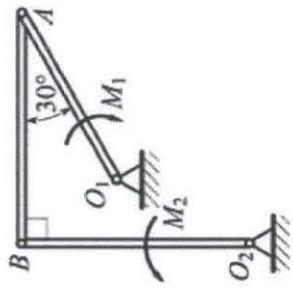
1. 平面力系向同平面内任一点简化结果都相同, 则该力系最终简化结果可能是平衡 或 合力偶。

2. $M_O(F) = ______ F \sin\beta \cdot \sqrt{l^2 + b^2}$ 。



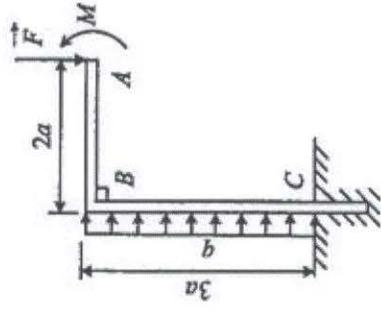
第 2 题图

3. 四连杆机构 O_1ABO_2 在图示位置平衡。 $O_1A = 0.4m$, $O_2B = 0.6m$ 。作用于杆 O_1A 上的力偶矩 $M_1 = 100N \cdot m$, 各杆自重不计。则 O_2 处反力为 500N。



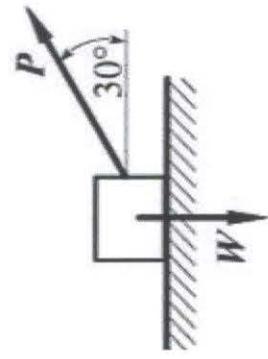
第 3 题图

4. 图示直角弯杆 ABC 的 AB 段水平, BC 段铅直, 各段长度分别为 $2a$ 和 $3a$, 所作用的载荷有集度为 q 的均布力、力偶矩 $M=q a^2$ 的力偶以及铅垂力 $F = 2qa$ 。固定端 C 处的约束力偶为 $7.5qa^2$ 。



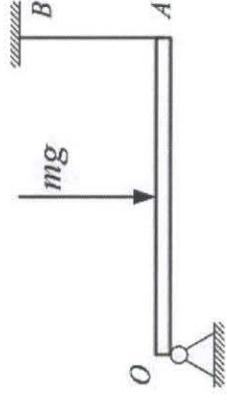
第 4 题图

5. 绳索以 $P = 100N$ 的拉力拉一重 $W = 500N$ 的物体, 物体与地面之间的摩擦系数 $f_s = 0.2$, 绳索与地面之间的夹角为 30° 。此时物体受到的摩擦力为 $86.6N$ 。



第 5 题图

6. 匀质杆 OA 重力为 mg , 突然剪断绳索 AB 时杆的角加速度为 $2g/3l$ 。



第 6 题图

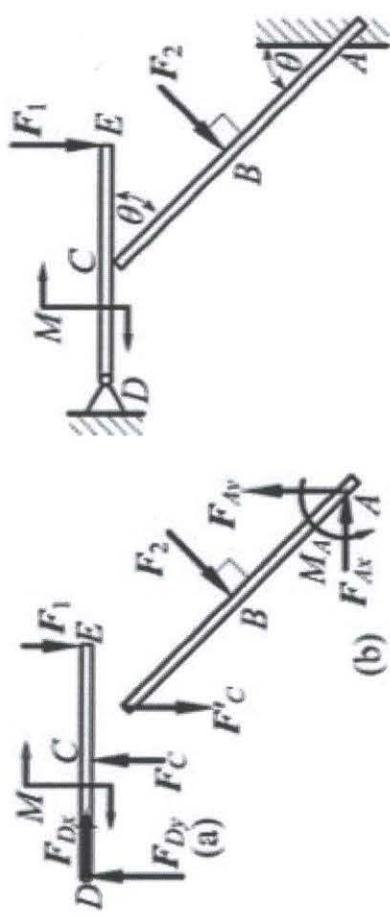


西安航空学院课程考试参考答案及评分标准

二、计算题 (4 小题, 共 76 分)

得分	
----	--

7. 图示结构中不计各构件自重, C 处为光滑接触。 $F_1 = F_2 = 400N$, $M = 300N \cdot m$; $AB = BC = 400mm$, $DC = CE = 300mm$, $\theta = 45^\circ$, 求固定端 A 处和铰链 D 处的约束力。(20 分)



受力图 6+6=12 分
图 (a) 列方程, 3 分;

$$F_{Dx} = 0$$

$$F_{Dy} = -1400N$$

$$F_C = 1800N$$

计算 1 分

图 (b) 列方程, 3 分;

$$F_{Ax} = 282.8$$

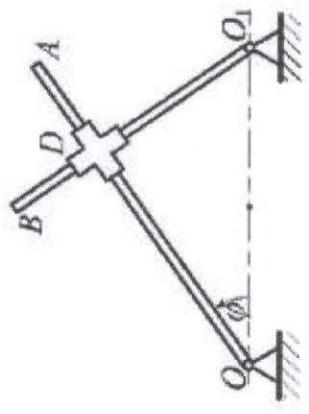
$$F_{Ay} = 2082.8N$$

$$M_A = -1178N \cdot m$$

计算 1 分

得分	
----	--

8. 图示机构中 OA 和 O_1B 分别绕 O 和 O_1 轴转动, 用十字滑块 D 将两杆连接。运动过程中两杆保持垂直。已知 $OO_1 = a$, $\varphi = kt$, 式中 k 为常数。 $O_1B = l$, 求滑块 D 的速度、B 点的速度和加速度。(16 分)



解法 1:

动点 D, 动系 OA, 画出速度矢量图, 5 分; 滑块 D 速度 $V_D = ak$, 1 分。
动点 D, 动系 O_1B , 画出速度矢量图, 5 分; O_1B 角速度、B 点的速度 $V_B = lk$, 2 分。

分析 B 点加速度或画出矢量图, $a_B = lk^2$, 3 分。

解法 2:

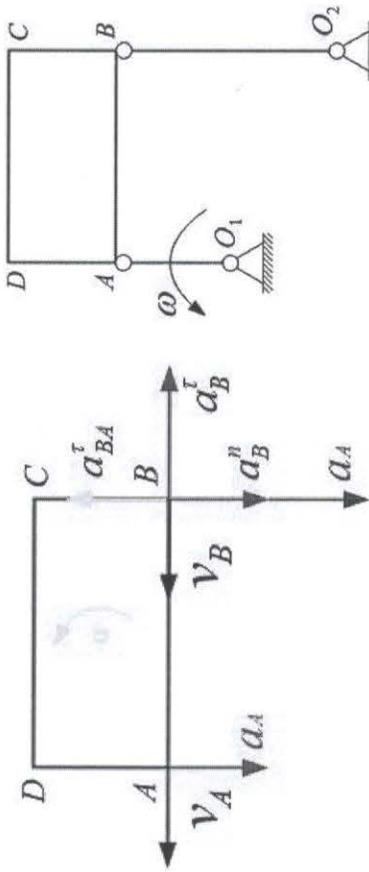
动点 D, 动系 OA, 画出速度矢量图, 5 分; 滑块 D 速度 $V_D = ak$, 1 分。
写出 O_1B 运动方程, 3 分; 写出 B 点的速度和加速度, 7 分。



西安航空学院课程考试参考答案及评分标准

得分	
----	--

9. 平面机构由 O_1A 和 O_2B 及矩形板 $ABCD$ 铰接而成, $O_1A = AD = r$, $O_2B = AB = 2r$ 。曲柄 O_1A 以匀角速度 ω 绕 O_1 轴转动, 图示瞬时 O_1A 、 O_2B 均与 AB 垂直。求此时点 C 的速度和加速度。(20分)



画出速度图, $v_A = v_B$, 4分; 矩形板 $ABCD$ 平动, $v_C = v_B = v_A = r\omega$, 3分; 以 A 为基点, 画 B 点加速度图, 4分; 求得矩形板 $ABCD$ 角加速度, 3分;

$$a_B^n = a_A - a_{BA}^r \Rightarrow a_{BA}^r = r\omega^2 - \frac{1}{2r}r\omega^2 = 2r\alpha$$

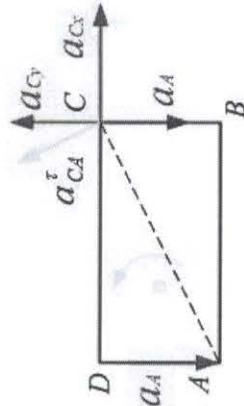
$$\alpha = \frac{1}{4}\omega^2$$

以 A 为基点, 画 C 点加速度图, 4分; 求得 C 点加速度, 2分;

$$a_{CA}^r = \frac{1}{4}\omega^2 \times \sqrt{5}r = \frac{\sqrt{5}}{4}r\omega^2$$

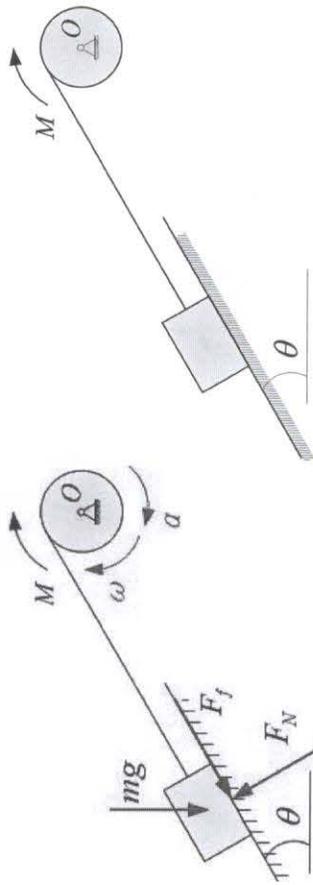
$$a_{Cx} = -\frac{\sqrt{5}}{4}r\omega^2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{4}r\omega^2$$

$$a_{Cy} = -r\omega^2 + \frac{\sqrt{5}}{4}r\omega^2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{2}r\omega^2$$



得分	
----	--

10. 不变力偶矩 M 作用在匀质鼓轮上, 轮半径为 r , 质量为 m , 绕在鼓轮上的绳索拉动质量为 m 的重物沿与水平成 θ 角的斜面上行。系统初始静止, 重物对斜面的滑动摩擦系数为 f , 不计绳索自重。求鼓轮的角加速度和绳索的拉力。(20分)



画受力图, 3分; 写出功, 3分:

$$W_{12} = M\varphi - mgr\varphi\sin\theta - fmg\cos\theta r\varphi = (M - mgr\sin\theta - fmg\cos\theta r)\varphi$$

$$s = r\varphi$$

运动分析, 写出动能, 5分: $T_1 = 0$, $v = r\omega$

$$T_2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}mr^2 \times \omega^2 = \frac{3}{4}mr^2\omega^2$$

$T_2 - T_1 = W_{12}$, 两侧求导, 3分:

$$\alpha = \frac{2(M - mgr\sin\theta - fmg\cos\theta r)}{3mr^2}$$

$$a = r\alpha$$

取滑块为研究对象, 画受力图与运动分析, 3分; 列方程求解, 3分:

$$mr\alpha = T - fmg\cos\theta - mg\sin\theta$$

$$T = \frac{2(M - mgr\sin\theta - fmg\cos\theta r)}{3r} + fmg\cos\theta + mg\sin\theta$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{M}{r} + fmg\cos\theta + mg\sin\theta\right)$$

2020-2021-1 学期课程教案

课程教案文件列表

第1章 静力学基础	2020/9/17 8:57	Microsoft Power...	22,255 KB
第2章 平面基本力系	2020/9/25 12:09	Microsoft Power...	2,300 KB
第3章 平面任意力系	2020/10/8 23:26	Microsoft Power...	5,081 KB
第5章 运动学基础	2020/10/18 17:47	Microsoft Power...	2,907 KB
第6章 点的合成运动	2020/10/27 17:34	Microsoft Power...	4,229 KB
第7章 刚体平面运动	2020/11/6 8:22	Microsoft Power...	4,633 KB
第8章 质点动力学(B)	2020/11/12 12:27	Microsoft Power...	8,440 KB
第10章 刚体定轴转动微分方程	2020/11/5 10:23	Microsoft Power...	5,399 KB
第11章 动能定理	2020/11/18 17:23	Microsoft Power...	2,696 KB

刘丹

理论力学

Theoretical Mechanics

力学教研室 刘舟

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

- 力学无处不在
- 力学是一种文化
- 力学教育是素质教育

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

<http://blog.sina.com.cn/xhtheoreticalmechanics>

理论力学-西航的博客
<http://blog.sina.com.cn/xhtheoreticalmechanics> (订阅) (注销)

首页 | 博文目录 | 图片 | 关于我

个人资料

博文

2013-2014学年第1学期期末考试《理论力学》试卷B (2014-09-17 11:53) [投票]

标签：教育 理论力学 力学 试题 分类：试题

一、选择题 (18分)

1. 如图所示, $P = 60\text{N}$, $F_2 = 200\text{N}$, A 、 B 两点的静摩擦因数 $f_s = 0.5$, 动摩擦因数, 即物块 A 所受的摩擦力大小为 _____。

A. 250N B. 200N C. $10\sqrt{3}\text{N}$ D. 0



2. 匀质杆 AB 长为 l , 质量为 m , 以角速度 ω 绕轴 O 轴转动, 则杆对过 O 点的 O 轴的动量矩 L 的大小为 _____。

西航力学公众微信号



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

理论力学绪论

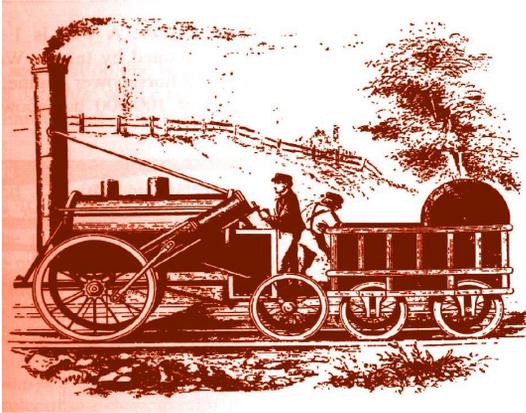
1. 工程与力学
2. 理论力学的研究对象、任务和内容
3. 理论力学的研究模型
4. 理论力学的研究方法
5. 力学发展简史

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

1.工程与力学

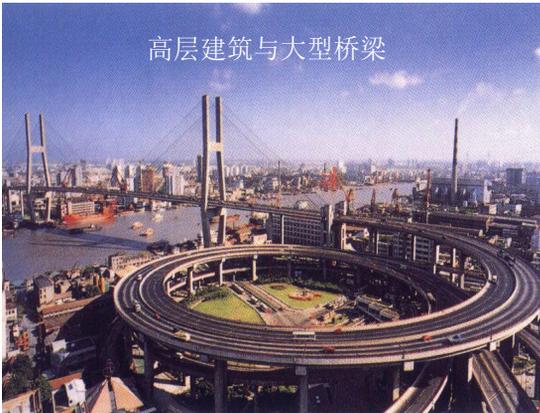
- 20世纪以前,在力学知识的积累、应用和完善的基础上,逐渐形成和发展起来的蒸汽机、内燃机、铁路、桥梁、舰船、兵器等大型工业推动了近代科学技术和社会的进步。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



20世纪中，一些高科技及其在各工业领域的应用与力学的指导密不可分。

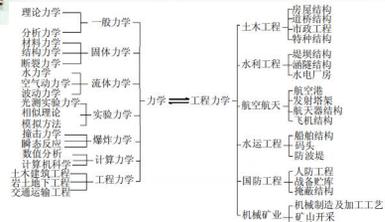
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



高层建筑与大型桥梁



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



力学与国民经济各行业关系框图

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

收稿日期: 2017-09-30
 通讯作者: 崔京浩(1934—), 男, 山东人, 教授, 副博士, 工程力学主编(1999年—2006年, 两届共8年), 现任名誉主编。
 作者简介: 龙驭球(1926—), 男, 湖南人, 中国工程院院士, 工程力学主编(1991年—1998年, 两届共8年);
 袁 骥(1963—), 男, 辽宁人, 教授, 博士, 力学学会副理事长, 土木工程学会副理事长, 工程力学主编(2007年—2014年, 两届共8年);
 陆新征(1978—), 男, 安徽人, 教授, 博士, 工程力学主编(2015—)。
 注: 本文由现任名誉主编崔京浩执笔。
 由于该命题十分浩大, 涉及诸多领域, 为准确计, 本文引用的资料除特别指明者外, 一律引自人民日报, 即使如此, 也不敢保证绝对无误, 如有重大失误均由执笔人崔京浩负责, 读者可直接致电或致函《工程力学》杂志社, 给予指正, 本执笔人万分感谢。
 第35卷第1期 Vol.35 No.1 工 程 力 学
 2018年1月 Jan. 2018 ENGINEERING MECHANICS

文章编号: 1000-4750(2018)01-0001-54

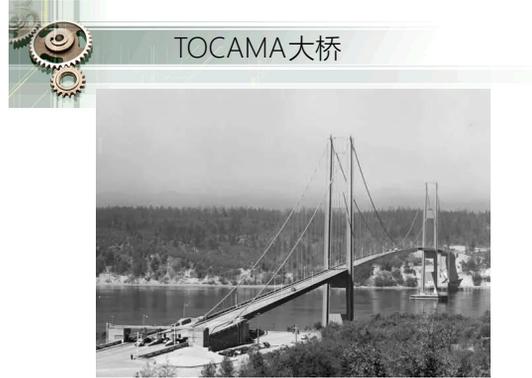
力学筑梦中国

龙驭球, 崔京浩, 袁 骥, 陆新征

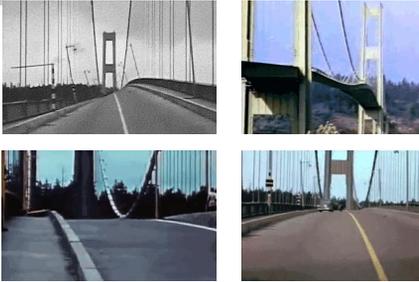
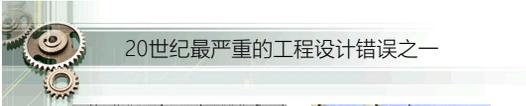
(清华大学土木工程系, 北京 100084)

摘 要: 该文讨论实现“中华民族伟大复兴的中国梦”力学应起和所起的作用。全文共分9个部分: 1) 力学; 2) 科技; 3) 土木; 4) 水利; 5) 交通; 6) 能源; 7) 一带一路; 8) 兴军强军; 9) 结论。比较详尽地阐述了中国建国后特别是改革开放以后与力学有关的国民经济的重大发展。我们四人均先后任职《工程力学》主编, 谨以此文献给2017年10月胜利召开的第十九次全国代表大会。今年(2018年)又适逢钱学森先生1958年所做的“争取力学工作大跃进”报告第60个年头, 这个报告促进并加强了力学在国民经济各个领域的强大作用, 愿以此文兼及纪念。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



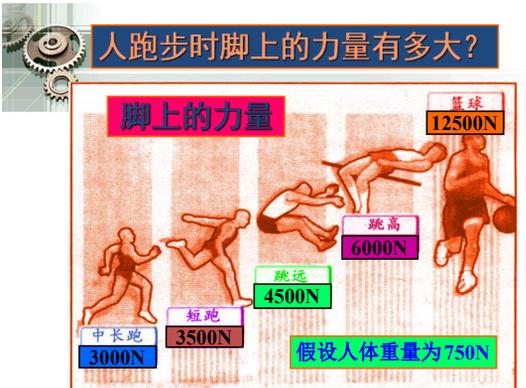
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

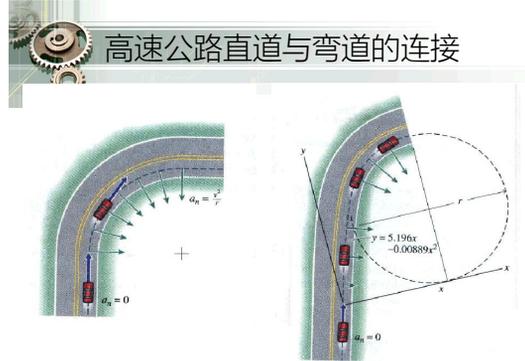


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

高速公路



高速公路直道与弯道的连接



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

航空航天器



高速列车



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

大型水利设施



20世纪产生的另一些高新技术虽然是在其他学科指导下产生和发展起来的，但也都对力学提出了各式各样的问题。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

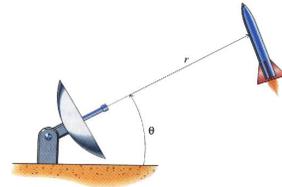
计算机硬盘驱动器

- 给定不变的角加速度，从启动到正常运行所需的时间以及所需经历的转数。
- 已知转台的质量及其分布，当驱动器到达正常运行所需角速度时，驱动马达的功率如何确定？



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

雷达跟踪目标



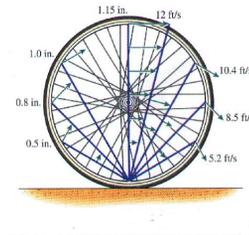
不同的时间间隔内通过测量目标与雷达之间的距离和雷达方位角准确地测定目标的速度和加速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



舰载飞机在发动机和弹射器推力作用下从甲板上起飞

日常生活中的力学问题



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

2.理论力学的研究对象与内容

- 力学研究物体机械运动规律的科学，揭示物体相互作用以及运动之间的关系。
- 研究物体的运动，研究作用在物体上的力与运动之间的关系；
- 宏观低速

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

机械运动

**物体在空间位置随
时间变化**

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

理论力学的研究内容

- 静力学
 - ✓ 力系的简化
 - ✓ 物体的平衡条件
- 运动学
 - ✓ 点的运动
 - ✓ 刚体的运动
- 动力学

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

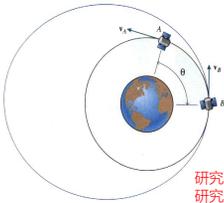
3、理论力学研究模型

- 理想化
- 物体模型
- 工作状态模型

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

物体模型 - 质点与质点系统

当所研究的物体运动范围远远超过其本身的几何尺寸时，物体的形状和大小对运动的影响很小，这时可以将其抽象为只有质量而无体积的质点。



研究卫星运动轨道时，卫星可视为质点；
研究卫星姿态控制时，则不能视为质点。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

刚体与变形体

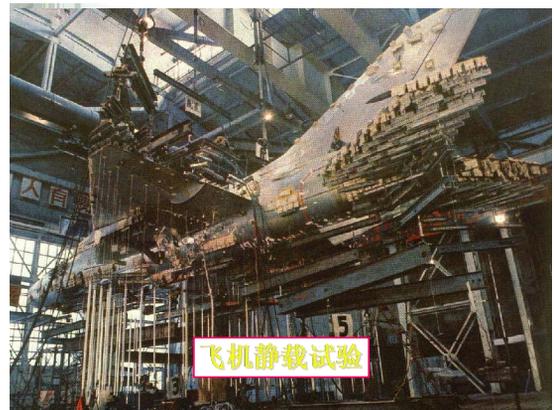
- ✗ 研究运动时忽略极小的变形 - 刚体；
- ✗ 研究物体的变形和内部受力规律时，则必须考虑变形 - 变形体。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

4、理论力学研究方法

- 理论分析方法
- 实验方法 - 具体设计的实验验证
- 计算机方法 - 现代计算技术与计算机应用

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



5、力学发展简史

- 车辆
- 《墨经》：力的概念、杠杆原理
- 鲁班：云梯、战船、攻城机械
- 李冰：都江堰
- 万里长城
- 李春：赵州桥（抗震）

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

5、力学发展简史

- 达芬奇（意）：斜面、摩擦、力矩
- 哥白尼（波兰）：日心说
- 伽利略（意）：惯性定律、加速度概念
- 牛顿（英）：Isaac Newton
- ✓ 1687年《自然哲学的数学原理》，人类认识史上的飞跃，使物理学成为严谨的科学学科

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

经典力学在中国的传播

- Mechanics “力学”
- 明朝末年《远东奇器图说》《泰西水法》
- 1858年，经典力学著作传入中国
- 1931年，牛顿的《原理》由商务印书馆出版，郑太朴译

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

新中国的力学研究

- 南京长江大桥
- 李四光
- 1974，人造卫星
- 三峡
- 神五——神舟十一号
- 探月工程

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第1篇 静力学

刚体静力学是将实际物体抽象为刚体，研究物体在力系作用下的平衡规律。力系 (forces system) 是指作用于物体上的若干个力所形成的集合，静力学包括三方面内容：

物体的受力分析- 分析结构或构件所受到的各个力的方向和作用线位置。

力系的等效与简化- 研究如何将作用在物体上的一个复杂力系用简单力系来等效替换，并探求其力系的合成规律。通过力系的等效与简化能够了解力系对物体作用的总效应。

力系的平衡条件与平衡方程- 研究物体处于平衡状态时作用在其上的各种力系应满足的条件。利用平衡条件建立所对应的数学方程，称为平衡方程。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第1篇 静力学

静力学的核心问题是利用平衡方程求解物体或物体系统的平衡问题。而研究力系的等效简化则是为了探求、建立力系的平衡条件。

静力学 (statics) 基础的概念、理论和方法不仅是工程构件静力设计的基础，而且在解决许多工程技术问题中有着广泛应用。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第1篇 静力学

本章主要介绍静力学模型—物体的模型、连接与接触方式的模型、载荷与力的模型，同时介绍物体受力分析的基本方法。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-1 静力学基本概念

- ✦ 力
- ✦ 物体的抽象与简化 - 刚体
- ✦ 平衡

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-1 静力学基本概念

一、力的概念

离开了物体，力就不可能存在。力虽然看不见，但它的作用效应完全可以直接观察，或用仪器测量出来。实际上，人们正是从力的作用效应来认识力本身的。

1. 力的定义

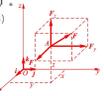
力 (force) 是物体间的相互作用。这种作用将使物体的运动状态发生变化 - 运动效应 (effect of motion)，或使物体发生变形 - 变形效应 (effect of deformation)。

外效应 (运动状态发生改变)、内效应 (变形)

2. 力的三要素 大小、方向、作用点

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

力的作用点指的是力在物体上的作用位置。力的作用位置是一定的面积，应为分布力。集中力在实际中是不存在的，它是分布力的理想化模型。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-1 静力学基本概念

集中力和分布力

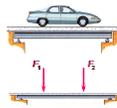
物体受力一般是通过物体间直接或间接接触进行的。接触处多数情况下不是一个点，而是具有一定尺寸的面积。因此无论是施力体还是受力体，其接触处所受的力都是作用在接触面积上的分布力(distributed force)。在很多情形下，这种分布力比较复杂。例如，人之脚掌对地面的作用力以及脚掌上各点处受到的地面支撑力都是不均匀的。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

集中力和分布力

当分布力作用面积很小时，为了分析计算方便起见，可以将分布力简化为作用于一点的合力，称为集中力(concentrated force)。

例如，静止的汽车通过轮胎作用在水平桥面上的力，当轮胎与桥面接触面积较小时，即可视为集中力，而桥面施加在桥梁上的力则为分布力。

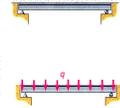


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

集中力和分布力

当分布力作用面积很小时，为了分析计算方便起见，可以将分布力简化为作用于一点的合力，称为集中力(concentrated force)。

例如，静止的汽车通过轮胎作用在桥面上的力，当轮胎与桥面接触面积较小时，即可视为集中力，而桥面施加在桥梁上的力则为分布力。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-1 静力学基本概念

3. 力系

作用在物体上的若干个力总称为力系。对同一物体产生相同效应的两个力系互称为等效力系。如果一个力系与单个力等效，则此单个力称为该力系的合力，而力系中的各力则称为合力的分力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-1 静力学基本概念

二、物体的抽象与简化 - 刚体

实际物体受力时，其内部各点间的相对距离都要发生改变，其结果是使物体的形状和尺寸改变，这种改变称为变形(deformation)。物体变形很小时，变形对物体的运动和平衡的影响甚微，因而在研究力的外效应时，可以忽略不计，这时的物体便可抽象为刚体(rigid body)。如果变形体在力系作用下处于平衡，则将此变形体简化为刚体时，其平衡状态不变，这一论断称为刚化原理(rigidity principle)。

任何物体受力后都将或多或少地发生变形。所谓刚体是指在受力情况下保持其几何形状和尺寸不变的物体。亦即受力后刚体内任意两点之间的距离保持不变的物体，是一种理想化的力学模型，实际上并不存在这样的物体。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-1 静力学基本概念

三、平衡

物体的平衡是指物体相对于惯性坐标系处于静止或匀速直线运动状态。工程上一般是指物体相对于地面保持静止或做匀速直线运动的状态。

作用于物体上使之保持平衡的力系称为平衡力系。

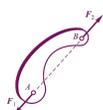
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-2 静力学公理

- 一、二力平衡公理
- 二、加减平衡力系公理
- 三、平行四边形公理
- 四、作用力与反作用力公理

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、二力平衡公理



二力平衡原理不计自重的刚体在二力作用下平衡的必要和充分条件是：二力沿着同一作用线，大小相等，方向相反。其数学表达式为

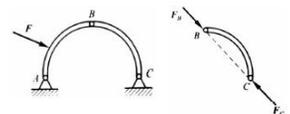
$$F_1 = -F_2$$

作用有二力二力处于平衡的刚体称为二力构件(members subjected to the action of two forces或二力杆)。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、二力平衡公理

二力构件的受力特点是此二力必沿两个受力点的连线。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、加减平衡力系公理

加减平衡力系原理在作用于刚体的力系中, 加上或减去任意一个平衡力系, 不改变原力系对刚体的作用效应, 称为加减平衡力系原理。

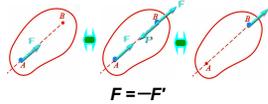
加减平衡力系原理**力系简化**(reduction of a force system)的重要依据之一。

推论 I: 力的可传性原理 (principle of transmissibility of a force) 作用于刚体上的力可沿其作用线滑移至刚体内任意点而不改变力对刚体的作用效应。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

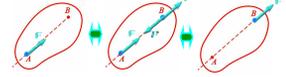
二、加减平衡力系公理

推论 I: 力的可传性原理 (principle of transmissibility of a force) 作用于刚体上的力可沿其作用线滑移至刚体内任意点而不改变力对刚体的作用效应。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、加减平衡力系公理

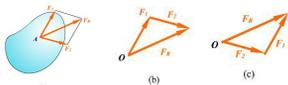


对于刚体, 力的三要素为: 力的大小、方向和作用线可沿方位线滑动的矢量称为**滑动矢量**(sliding vector), 作用于刚体上的力是滑动矢量。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、平行四边形公理

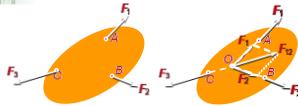
作用在物体上同一点的两个力, 可以合成为一个合力。合力的作用点也在该点, 合力的大小和方向, 由这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定。



合力合力的大小与方向 $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ 矢量的和
亦可用力三角形求得合力矢

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、平行四边形公理



推论 II: 三力平衡汇交定理 作用于刚体上的三个力, 若构成平衡力系, 且其中两个力的作用线汇交于一点, 则三个力必在同一平面内, 而且第三个力的作用线一定通过汇交点。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、作用与反作用公理

施力物体对受力物体有力作用时, 受力物体对施力物体有反作用力存在。作用力和反作用力大小相等, 方向相反, 作用在相互作用的两个物体上。

$$\vec{F} = -\vec{F}' \quad \vec{F}' = -\vec{F}$$

作用力与反作用力是一对平衡力吗?

作用力和反作用力总是同时存在, 同时消失, 等值、反向、共线, 作用在相互作用的两个物体上。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-3 约束

一、约束概念

工程中的机器和结构都是由若干零件和构件通过相互接触和相互连接而成。约束 (constraint) 则是接触和连接方式的高化模型。

物体的运动, 如果没有受到其他物体的直接制约, 诸如飞行中飞机、火箭、人造卫星等, 这类物体称为自由体 (free body)。物体的运动, 如果受到其他物体直接制约, 诸如在地面上行驶的车辆受到地面的制约, 桥梁受到桥墩的制约, 各种机械中的轴受到轴承的制约等等, 这类物体称为非自由体或受约束体 (constrained body)。

约束的作用是对与之连接物体的运动施加一定的限制条件。地面限制车辆在地球上运动; 桥墩限制桥梁的运动, 使之保持固定的位置; 轴承限制轴只能在轴承中转动等等。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-3 约束

一、约束概念

➤ 约束限制物体的某些运动或运动趋势, 故约束对物体的作用实质上就是力的作用, 这种力称为约束反力 (reactions of constraint) 简称反力 (constraint force)

➤ **约束反力的方向必与其所能限制的运动或运动趋势的方向相反。**

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-3 约束

二、常见约束与约束力

工程中的机器和结构都是由若干零件和构件通过相互接触和相互连接而成。约束 (constraint) 则是接触和连接方式的高化模型。

约束施加于被约束物体上的力称为约束力 (constraint force)。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、常见约束与约束力

1、柔性约束

绳索、工业带、链条等统称为柔索 (dable)。这种约束的特点是其约束力只能沿柔索方向，并且背离物体（拉力）。

链条约束与约束力

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、常见约束与约束力

1、柔性约束

皮带约束与约束力

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、常见约束与约束力

2、刚性约束N

约束体与被约束体都是刚体，因而二者之间为刚性接触。这种约束称为刚性约束或光滑面约束。

光滑面约束反力的特点是过接触点，沿该点公法线并指向被约束物体。

齿轮啮合力

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

2、刚性约束反力N

刚性约束反力为过接触点，沿该点公法线并指向被约束物体

齿轮啮合力

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

2、刚性约束反力N

刚性约束反力过接触点，沿该点公法线并指向被约束物体

滑槽与销钉

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3、光滑铰链约束

辊轴

工程结构中为了减少因温度变化而引起的约束力，通常在固定铰链支座的底部安装一排辊轮或轴，可使支座沿固定支表面自由滚动。这种约束称为滚动铰链支座，又称辊轴支座(roller support或滑动支座)。当构件的长度由于温度变化而改变时，这种支座允许物件的一端沿支表面自由移动。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3、光滑铰链约束

辊轴

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3、光滑铰链约束

辊轴(实际约束中)F_R方向也可以向下

反力特点：垂直于支承面，指向不定。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3、光滑铰链约束

将具有相同圆孔的两构件用圆柱形销钉连接起来，称为中间铰约束

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3、光滑铰链约束

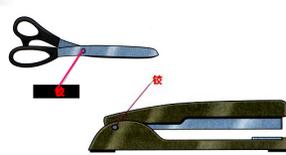
当外界载荷不同时，接触点会变，则约束力的大小与方向均有改变。



可用二个通过轴心的正交分力 F_x, F_y 表示。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

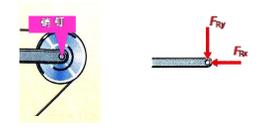
3、光滑铰链约束



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3、光滑铰链约束

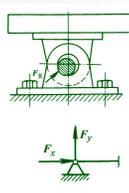
销钉(铰链)



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

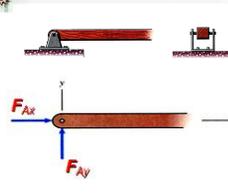
3、光滑铰链约束——固定铰支座

构件的端部与支座有相同直径的圆孔，用一个圆柱形销钉连接起来。支座固定在地基或者其他结构上。这种连接方式称为固定铰链支座，简称为固定铰支座 (smooth cylindrical pin support)。桥梁上的固定支座就是固定铰链支座。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

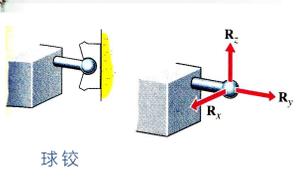
3、光滑铰链约束——固定铰支座



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3、光滑铰链约束——固定铰支座

球铰



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3、光滑铰链约束——球铰



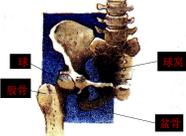
约束特点：通过球与球壳将构件连接，构件可以绕球心任意转动，但构件与球心不能有任何移动。

约束力：当忽略摩擦时，球与球座亦是光滑约束问题。约束力通过接触点，并指向球心，是一个不能预先确定的空间力，可用三个正交分力表示。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3、光滑铰链约束——球铰

盆骨与股骨之间的球铰连接



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3、光滑铰链约束——球铰



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

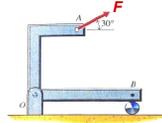
分析力学问题时，往往必须先根据问题的性质、已知量和所要求的未知量，选择某一物体（或几个物体组成的系统）作为研究对象，并假想地将所研究的物体从与之接触或连接的物体中分离出来，即解除其所受的约束而代之以相应的约束力。

解除约束后的物体，称为分离体 (isolated body)。

分析作用在分离体上的全部主动力和约束力，画出分离体的受力简图 - 受力图。这一过程即为受力分析。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图



怎样确定O、B二处的受力？

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

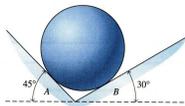
受力分析思路：

- 选定合适的研究对象，确定分离体；
- 画出所有作用在分离体上的主动力；
- 在分离体的所有约束处根据约束的性质画出约束力。
- 勿添勿漏。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

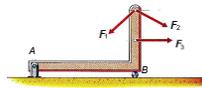
例题1、绘制自重为M的匀质球体的受力图



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

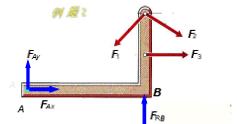
例题2



确定A、B二处的约束力

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

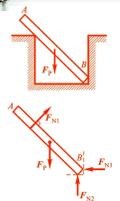


取隔离体

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

例题3



重力为G的AB杆放置在刚性槽内。所有接触处均为光滑接触。试画出该杆的受力图。

解：1 研究对象：AB杆，画出其分离体；

2 在分离体上画主动力F_G；

3 由各光滑接触处约束力沿其公法线方向画出三处的约束力

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

当选择若干个物体组成的系统作为研究对象时，作用于系统上的力可分为两类：系统外物体作用于系统内物体上的力，称为外力 (external force)；系统内物体间的相互作用力称为内力 (internal force)。

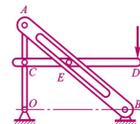
内力和外力的区分不是绝对的，内力和外力，只有相对于某一确定的研究对象才有意义。由于内力总是成对出现的，不会影响所选择的研究对象的平衡状态，因此，在受力图不必标出。

此外，当所选择的研究对象不止一个时，要正确应用作用与反作用定律，确定相互联系的研究对象在同一约束处的约束力应该大小相等方向相反

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

例题4



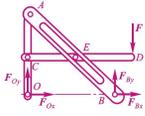
图示结构中各杆重力均不计，所有接触处均为光滑接触。

试画出AC、AB和CD构件的受力图。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

例题 4

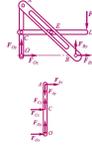


解: 1. 整体受力:
Q、B二处为固定铰链约束, 可以画出其约束力;
其余各处的约束力均为内力, 不必画出。
D处作用有主动灯。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

例题 4

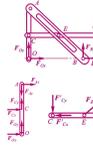


解: 2. AOC杆受力:
O处受力与整体受力图一致;
C、A两处为中间活动铰链, 约束力可以分解为两个分力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

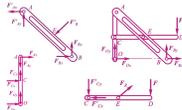
例题 4



解: 3. CD杆受力:
C处受力与AOC在C处的受力, 互为作用力和反作用力;
CD上所带销钉处受到AB杆中斜槽光滑约束力 F_N 。
D处作用有主动灯。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

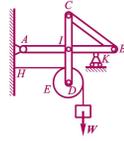


解: 4. AB杆受力:
A处受力与与AO在A处的受力互为作用力和反作用力;
E处受力与CD在E处的受力互为作用力和反作用力;
B处的约束力分解为两个分量。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

例题 5

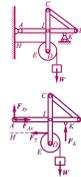


图示结构中各杆重力均不计, 所有接触处均为光滑接触。

试画出各构件的受力图。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图



解: 1. 整体受力:
A处为固定铰链, 约束力方向未知, 可用两个分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 表示;
K处为辊轴支承, 只有铅垂方向约束力 F_N ;
H处为柔索, 约束力(拉力)。D、C、I、B处未解除约束, 约束力无需画出(内力)。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

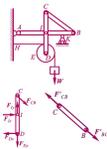
§1-4 受力图



解: 2. CD杆受力:
CB为二力杆, 所以处 F_{CB} 方向沿CB;
E处为中间活动铰链, 故处约束力可用两个分力 F_{Ex} 、 F_{Ey} 表示;
D处中间活动铰链处的约束力也可用两个分力 F_{Dx} 、 F_{Dy} 表示。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

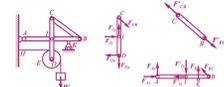
§1-4 受力图



解: 3. CB杆受力:
CB杆为二力杆, 其C端约束力与CD杆C端的约束力互为作用与反作用力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

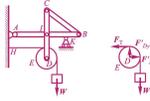
§1-4 受力图



解: 4. AB杆受力:
A处和K处约束力与整体受力图相同;
I处的约束力与CD杆I'处的约束力互为作用力和反作用力;
B处的约束力与CB杆上B处的约束力互为作用力和反作用力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

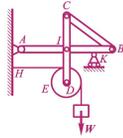
§1-4 受力图



解：5. 轮D与重物组成的系统受力图
 绳索拉力与整体受力图相同；
 D处约束力与CD上D处的约束力互为作用力与反作用力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§1-4 受力图

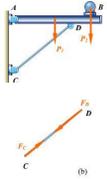


解：讨论：
 如果以CD杆和轮D组成的系统作为研究对象，请画其受力图。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

课堂练习

水平均质梁AB重为 P ，电动机重为 P_1 ，不计杆CD的自重，画出杆CD和梁AB的受力图。

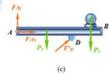


解：
 取CD杆，其为二力构件，简称二力杆，其受力图如图(b)

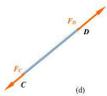
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

课堂练习

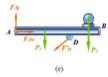
取AB梁，其受力图如图(c)



CD杆的受力图能否画为图(d)所示？



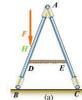
若这样画，梁AB的受力图又如何改动？



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

课堂练习

不计自重的梯子放在光滑水平地面上，画出梯子、梯子左右两部分与整个系统受力图。



解：绳子受力图如图(6)所示

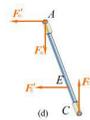
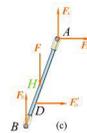


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

课堂练习

梯子左边部分受力图如图(6)所示

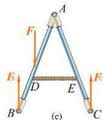
梯子右边部分受力图如图(d)所示



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

课堂练习

整体受力图如图(6)所示



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

画受力图步骤：

- 1、取研究对象（分离体），画出简图
- 2、标出所有主动力
- 3、按约束性质画出所有约束（被动）力
- 4、检查受力图中的力是否有多、漏、错的现象。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

力—物体间的相互作用，力是矢量。对一般物体而言，力是定位矢量；对刚体而言，力是滑移矢量。

刚体—受力不变形的物体。

约束——物体与物体之间接触和连接方式的简化模型。约束的作用是对与之连接物体的运动施加一定的限制条件。

约束力—约束对被约束物体的作用力。

平衡—物体相对惯性系静止或作匀速直线平移。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



第二章 平面汇交力系

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

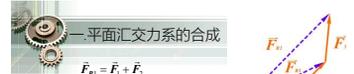


§2-1 平面汇交力系合成与平衡的几何法

一. 平面汇交力系的合成——力多边形法则



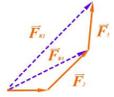
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



一. 平面汇交力系的合成

$$\vec{F}_{R1} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_{R2} = \vec{F}_{R1} + \vec{F}_{R3} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i$$



力多边形

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum \vec{F}_i$$

力多边形法则：将力系中各力顺次首尾相连，始力起点到终力终点即为合力

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



二. 平面汇交力系平衡的几何条件

力系平衡的必要与充分条件是该力系的合力等于零。

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

平面汇交力系平衡的充分必要条件是：

力系的力多边形自行封闭

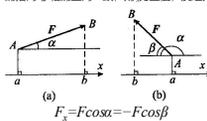
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



§2-2 平面汇交力系合成与平衡的解析法

一. 力在坐标轴上的投影

➢ 设有力F与x轴共面，由力的始端A点和末端B点分别向x轴作垂线，垂足为a和b，则轴上线段ab的长度就表示力在x轴上的投影，记为F_x。如果从a到b的指向与x轴的正向一致，则为正值，反之为负值。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



一. 力在坐标轴上的投影

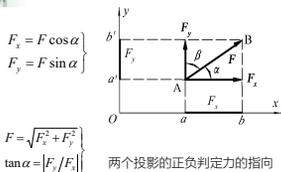
力在轴上的投影是有正负规定的代数量，计算时要特别注意投影的正负号。

- 当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时，F_x为正值，F_x = F_x
- 当 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时，F_x为负值，F_x = -F_x
- 当 $\alpha = 90^\circ$ 时，F_x为零。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



一. 力在坐标轴上的投影

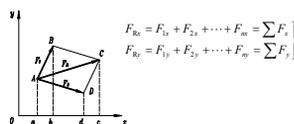


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



二. 合力投影定理

力系的合力在某一轴上的投影，等于力系中各分力在同一轴上投影的代数和。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



三. 平面汇交力系合成的解析法

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$$

由合力投影定理：

$$F_{Rx} = \sum F_{ix} \quad F_{Ry} = \sum F_{iy}$$

合力的大小为： $F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}$

方向为：

$$\tan \alpha = \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right| = \left| \frac{\sum F_{iy}}{\sum F_{ix}} \right|$$

由投影正负判定合力指向，作用在力系汇交点。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例2-1 固定于房顶的吊钩上有三个力 F_1 、 F_2 、 F_3 ，其数值与方向如图所示。用解析法求此三力的合力。

$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 732 \text{ N} + 0 - 2000 \text{ N} \times \cos 30^\circ = -1000 \text{ N}$
 $F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 - 732 \text{ N} - 2000 \text{ N} \times \sin 30^\circ = -1732 \text{ N}$
 $F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 2000 \text{ N}$
 $\tan \alpha = |\sum F_x / \sum F_y| = 1.732$
 $\alpha = 60^\circ$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例2-2 求此力系的合力

解：用解析法

$F_{Rx} = \sum F_x = F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F_3 \cos 45^\circ + F_4 \cos 45^\circ = 129.3 \text{ N}$
 $F_{Ry} = \sum F_y = F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ - F_3 \sin 45^\circ - F_4 \sin 45^\circ = 112.3 \text{ N}$
 $F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 171.3 \text{ N}$
 $\cos \theta = \frac{F_{Rx}}{F_R} = 0.7548$
 $\cos \beta = \frac{F_{Ry}}{F_R} = 0.6556$
 $\theta = 40.99^\circ, \beta = 49.01^\circ$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、平面汇交力系的平衡方程

平衡条件 $\vec{F}_R = 0$

平衡方程 $\sum F_x = 0$
 $\sum F_y = 0$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、平面汇交力系的平衡方程

如图所示，重物 $G=20\text{kN}$ ，用钢丝绳挂在支架的滑轮上，钢丝绳的另一端缠绕在较车 D 上。杆 AB 与 BC 铰接，并以铰链 A 、 C 与墙连接。如两杆和滑轮的自重不计，并忽略摩擦和滑轮的大小，试求平衡时杆 AB 和 BC 所受的力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

如图所示，重物 $G=20\text{kN}$ ，用钢丝绳挂在支架的滑轮上，钢丝绳的另一端缠绕在较车 D 上。杆 AB 与 BC 铰接，并以铰链 A 、 C 与墙连接。如两杆和滑轮的自重不计，并忽略摩擦和滑轮的大小，试求平衡时杆 AB 和 BC 所受的力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

平衡方程应用思路

- 选取研究对象 (整体、部分)
- 画受力图 (由简单到复杂)
- 建立坐标系 (沿某未知力)
- 列平衡方程 (避免求解联立方程)
- 检查 (新取投影轴)

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例2-3 已知： $P=20\text{kN}$ ， $R=0.6\text{m}$ ， $h=0.08\text{m}$

求：

1. 水平拉力 $F=5\text{kN}$ 时，碾子对地面及障碍物的压力？
2. 欲将碾子拉过障碍物，水平拉力至少多大？
3. 力 F 沿什么方向拉动碾子最省力，及此时 F 多大？

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解：1. 取碾子，画受力图

用几何法，按比例画封闭力四边形

$\theta = \arccos \frac{R-h}{R} = 30^\circ$
 $F_B \sin \theta = F$
 $F_A + F_B \cos \theta = P$
 $F_B = 11.4 \text{ kN}$
 $F_B = 10 \text{ kN}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

2. 碾子拉过障碍物，应有 $F_A = 0$

用几何法解得 $F = P \cdot \tan \theta = 11.56 \text{ kN}$

3. 解得 $F_{\min} = P \cdot \sin \theta = 10 \text{ kN}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例2-4

已知: $AC=CB$, $F=10\text{kN}$ 各杆自重不计;
求: CD 杆及铰链 A 的受力

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解: CD 为二力杆, 取 AB 杆, 画受力图

用几何法, 画封闭力三角形

按比例量得 $F_{CD} = 28.3\text{kN}$, $F_A = 22.4\text{kN}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例2-5

已知: 系统如图, 不计杆、轮自重
忽略滑轮大小 $P=20\text{kN}$;
求: 系统平衡时, 杆 AB, BC 受力.

解: AB, BC 杆为二力杆,
取滑轮 B (或点 B), 画受力图

建图示坐标系

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{B1} + F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{B2} - F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ = 0$$

$$F_1 = F_2 = P$$

$\Rightarrow F_{B1} = -7.32\text{kN} \quad F_{B2} = 27.32\text{kN}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例2-6

结构如图所示。球体重 50kN , 斜面倾角 $\theta = 30^\circ$, 接触点 D 恰好 AB 中点, 不计撑架自重, 各接触处光滑, 求 AC 及铰 B 受力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§2-3 平面力对点之矩的概念和计算

一、平面力对点之矩 (力矩)

力矩作用面, C 称为矩心, C 到力的作用线的垂直距离/称为力臂

两个要素:

- 1.大小: 力与力臂的乘积
- 2.方向: 转动方向

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、平面力对点之矩 (力矩)

$$M_o(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$

力对点之矩是一个代数量, 它的绝对值等于力的大小与力臂的乘积, 它的正负: 力使物体绕矩心逆时针转向时为正, 反之则为负常用单位 $\text{N}\cdot\text{m}$ 或 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、合力矩定理

平面汇交力系

$$M_o(\vec{F}_R) = \sum M_o(\vec{F}_i)$$

该结论适用于任何合力存在的力系

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、力矩与合力矩的解析表达式

$$M_o(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_x) - M_o(\vec{F}_y)$$

$$= x \cdot F \cdot \sin \theta - y \cdot F \cdot \cos \theta$$

$$= x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

$$M_o(\vec{F}_R) = \sum M_o(\vec{F}_i)$$

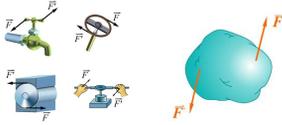
$$M_o(\vec{F}_R) = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix})$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§2-4 平面力偶理论

一、力偶和力偶矩

1. 力偶 由两个等值、反向、不共线的（平行）力组成的力系称为力偶，记作 (\vec{F}, \vec{F}')



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

2. 力偶矩

力偶中两力所在平面称为力偶作用面

力偶两力之间的垂直距离称为力偶臂

两个要素

a. 大小：力与力偶臂乘积

b. 方向：转动方向

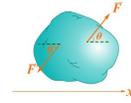
力偶矩

$$M = \pm F \cdot d = \pm 2\Delta ABC$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

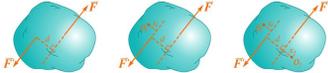
二、力偶与力偶矩的性质

1. 力偶没有合力，力偶在任意坐标轴上的投影等于零力偶只能由力偶来平衡



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

2. 力偶对任意点取矩都等于力偶矩，不因矩心的改变而改变



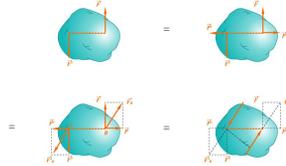
$$M_{O_1}(\vec{F}, \vec{F}') = M_{O_1}(\vec{F}) + M_{O_1}(\vec{F}') = \vec{F} \cdot (d + \vec{x}_1) - \vec{F}' \cdot \vec{x}_1 = Fd$$

$$M_{O_2}(\vec{F}, \vec{F}') = \vec{F}' \cdot (d + \vec{x}_2) - \vec{F} \cdot \vec{x}_2 = Fd = Fd$$

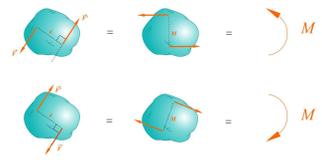
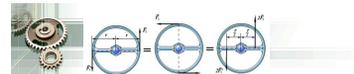
力偶矩的符号

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3. 只要保持力偶矩不变，力偶可在其作用面内任意转移，且可以同时改变力偶中力的大小与力臂的长短，对刚体的作用效果不变



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、平面力偶系的合成和平衡条件

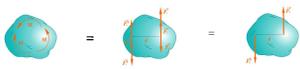
已知： M_1, M_2, \dots, M_n ;

任选一段距离 l

$$\frac{M_1}{d} = F_1 \quad M_1 = F_1 d$$

$$\frac{M_2}{d} = F_2 \quad M_2 = F_2 d$$

$$\left| \frac{M_n}{d} \right| = F_n \quad M_n = -F_n d$$

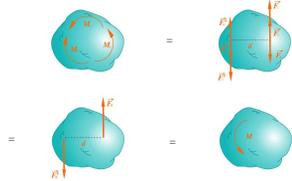


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、平面力偶系的合成和平衡条件

$$F_R = F_1 + F_2 + \dots - F_n$$

$$F'_R = F'_1 + F'_2 + \dots - F'_n$$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、平面力偶系的合成和平衡条件

$$M = F_1 d + F_2 d + \dots - F_n d = M_1 + M_2 + \dots - M_n$$

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = \sum M_i$$

平面力偶系平衡的充要条件 $M=0$ ，平衡方程：

$$\sum M_i = 0$$

平面力偶系平衡的必要和充分条件是：所有各力偶矩的代数和等于零

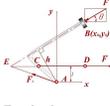
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例2-7
 已知: $F=140\text{N}$, $\theta=20^\circ$, $r=60\text{mm}$
 求: $M_O(\vec{F})$
 解直接按定义
 $M_O(\vec{F}) = F \cdot h = F \cdot r \cdot \cos\theta$
 $= 78.93\text{N}\cdot\text{m}$
 按合力矩定理
 $M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2)$
 $= F \cdot \cos\theta \cdot r = 78.93\text{N}\cdot\text{m}$



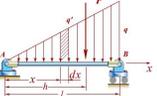
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例2-8
 已知: F, θ, x_A, y_B, l
 求: 平衡时, CD 杆的拉力
 解: CD 为二力杆, 取踏板
 由杠杆平衡条件
 $F \cos\theta \cdot y_B - F \sin\theta \cdot x_B - F_{CD} \cdot l = 0$
 解得 $F_{CD} = \frac{F \cos\theta \cdot y_B - F \sin\theta \cdot x_B}{l}$



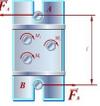
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例2-9 已知 q, l , 求合力及其作用线位置。
 解: 取微元如图
 $q' = \frac{x}{l} \cdot q$
 $P = \int_0^l q' dx = \frac{1}{2}ql$
 由合力矩定理 $P \cdot h = \int_0^l q' dx \cdot x = \int_0^l \frac{x^2}{l} q dx$
 得 $h = \frac{2}{3}l$



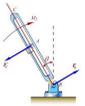
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例2-10 已知:
 $M_1 = M_2 = 10\text{N}\cdot\text{m}$, $M_3 = 20\text{N}\cdot\text{m}$, $l = 200\text{mm}$;
 求: 光滑螺柱A所受水平力
 解: 由力偶只能由力偶平衡的性质, 其受力图为
 $\sum M = 0$
 $F_A l - M_1 - M_2 - M_3 = 0$
 解得 $F_A = F_B = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{l} = 200\text{N}$

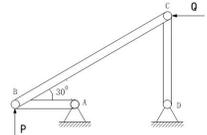


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例2-11
 已知 $M_1 = 2\text{kN}\cdot\text{m}$, $OA = r = 0.5\text{m}$, $\theta = 30^\circ$;
 求: 平衡时的 M_2 及铰链 C, B 处的约束力
 解: 取轮由力偶只能由力偶平衡的性质画受力图
 $\sum M = 0 \quad M_1 - F_A \cdot r \sin\theta = 0$
 解得 $F_A = F_B = 8\text{kN}$
 取杆BC, 画受力图
 $\sum M = 0 \quad F_A \cdot \frac{r}{\sin\theta} - M_2 = 0$
 解得 $M_2 = 8\text{kN}\cdot\text{m}$
 $F_B = F_A = 8\text{kN}$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

课堂练习: 求结构平衡时P、Q比值。


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第三章 平面任意力系

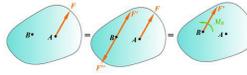
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§3-1 平面任意力系向作用面内一点简化

一、力的平移定理

作用在刚体上力可平行移动到刚体上任一点，但必须同时附加一个力偶，附加力偶矩的大小等于原力对平移点之矩。

$$M_B = M_O(\vec{F}) = Fd$$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、平面任意力系向作用面内一点简化

$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1 \quad M_1 = M_O(\vec{F}_1)$$

$$\vec{F}'_2 = \vec{F}_2 \quad M_2 = M_O(\vec{F}_2)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\vec{F}'_n = \vec{F}_n \quad M_n = M_O(\vec{F}_n)$$

$$\vec{F}'_R = \sum \vec{F}'_i = \sum \vec{F}_i$$

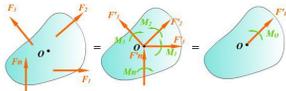
$$M_O = \sum M_i = \sum M_O(\vec{F}_i)$$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、平面任意力系向作用面内一点简化

主矢 $\vec{F}'_R = \sum \vec{F}_i$ 主矩 $M_O = \sum M_O(\vec{F}_i)$



平面任意力系最终的简化结果为一个力和一个力偶。这个力称为主矢，大小等于原力系中各力的矢量和，与简化中心无关；这个力偶称为主矩，大小为原力系中各力对简化中心之矩的代数和，通常与简化中心有关。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$$F_{Rx}' = \sum F_{ix}' = \sum F_{ix} = \sum F_x$$

$$F_{Ry}' = \sum F_{iy}' = \sum F_{iy} = \sum F_y$$

主矢大小 $F_R = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}$

方向 $\cos(\vec{F}'_R, i) = \frac{\sum F_{ix}}{F_R}$ $\cos(\vec{F}'_R, j) = \frac{\sum F_{iy}}{F_R}$

作用点 作用于简化中心

主矩 $M_O = \sum M_O(\vec{F}_i)$

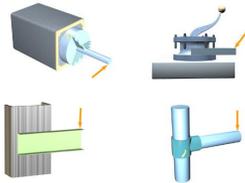
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、平面固定端约束



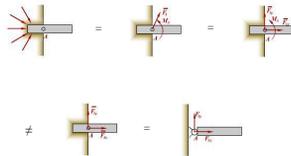
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、平面固定端约束



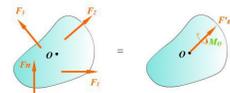
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、平面固定端约束



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、平面任意力系的简化结果分析



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、平面任意力系的简化结果分析

$\vec{F}'_R \neq 0 \quad M_O = 0 \Rightarrow$ 主矢即为合力
合力作用线过简化中心

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、平面任意力系的简化结果分析

$\vec{F}'_R \neq 0 \quad M_O \neq 0 \Rightarrow$ 合力，作用线距简化中心

$d = \frac{M_O}{F'_R} \quad M_O = F'_R d \quad F_R = F'_R = F$

合力矩定理 $M_O(\vec{F}_R) = M_O = \sum M_O(\vec{F}_i)$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

合力矩定理

平面力系的合力对某点之矩等于力系中各分力对同一点之矩的代数和

$M_O(\vec{F}_R) = M_O = \sum M_O(\vec{F}_i)$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、平面任意力系的简化结果分析

$\vec{F}'_R = 0 \quad M_O \neq 0 \Rightarrow$ 合力偶
与简化中心的位置无关

若为O₁点，如何?

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、平面任意力系的简化结果分析

$\vec{F}'_R = 0 \quad M_O = 0 \Rightarrow$ 平衡
与简化中心的位置无关

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-1:

如图所示的一平面任意力系，每方格边长为10cm， $F_1 = F_2 = 10\text{N}$ ， $F_3 = F_4 = 10\sqrt{2}\text{N}$ ，试求该力系的最后简化结果?

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-1:

如图所示的一平面任意力系，每方格边长为10cm， $F_1 = F_2 = 10\text{N}$ ， $F_3 = F_4 = 10\sqrt{2}\text{N}$ ，试求该力系的最后简化结果?

$\sum F_x = -F_1 = -10\text{N}$
 $\sum F_y = -F_2 + 2F_3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\text{N}$
 $F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 10\sqrt{2}\text{N}$
 $\tan \alpha = \frac{|\sum F_y|}{|\sum F_x|} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$
 $M_O = F_1 \times 30 + F_2 \times 10 = 400\text{Ncm}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-1:

如图所示的一平面任意力系，每方格边长为10cm， $F_1 = F_2 = 10\text{N}$ ， $F_3 = F_4 = 10\sqrt{2}\text{N}$ ，试求该力系的最后简化结果?

$\sum F_x = -F_1 = -10\text{N}$
 $\sum F_y = -F_2 + 2F_3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\text{N}$
 $F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 10\sqrt{2}\text{N}$
 $\tan \alpha = \frac{|\sum F_y|}{|\sum F_x|} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$
 $M_O = F_1 \times 30 + F_2 \times 10 = 400\text{Ncm}$
 $d = \frac{|M_O|}{F_R} = 20\sqrt{2}\text{cm}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-2

焊接薄钢板，在轴B、C、D分别受到力 F_1 、 F_2 和 F_3 的作用如图示。已知 $F_1 = 100\text{N}$ ， $F_2 = 50\text{N}$ ， $F_3 = 200\text{N}$ 。图中尺寸单位为mm。求①力系向A点，C点的简化结果；②力系简化的最终结果；③以上三种情况的简化结果是否等效。

$F_R = \sqrt{(F_{Rx})^2 + (F_{Ry})^2} = \sqrt{200^2 + 150^2} = 250\text{N}$
 $\tan \alpha = \frac{|F_{Ry}|}{|F_{Rx}|} = \frac{150}{200} = 0.75$
 $M_A = \sum M_A(F) = F_1 \times 0.02 + F_2 \times 0.08 = 100 \times 0.02 + 50 \times 0.08 = 6\text{N}\cdot\text{m}$
 $M_C = \sum M_C(F) = -F_1 \times 0.06 + F_3 \times 0.04 = -100 \times 0.06 + 200 \times 0.04 = 2\text{N}\cdot\text{m}$

F_R 力方向角 $= 36.87^\circ$
大小和方向与简化中心的选择无关，故向A点或C点简化得到的主矢相同。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-3 已知:
 $P_1 = 450\text{kN}$, $P_2 = 200\text{kN}$, $F_1 = 300\text{kN}$, $F_2 = 70\text{kN}$;
 求: 力系向O点的简化结果
 合力与OA的交点到点C的距离x
 合力作用线方程

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解: (1) 主矢:
 $\sum F_x = F_1 - F_2 \cos \theta = 232.9\text{kN}$
 $\sum F_y = -P_1 - P_2 - F_1 \sin \theta = -670.1\text{kN}$
 $\Rightarrow F_R' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 709.4\text{kN}$
 $\cos(\vec{F}_R', \vec{i}) = \frac{\sum F_x}{F_R'} = 0.3283$, $\cos(\vec{F}_R', \vec{j}) = \frac{\sum F_y}{F_R'} = -0.9446$
 $\Rightarrow \angle(\vec{F}_R', \vec{i}) = \pm 70.84^\circ$, $\angle(\vec{F}_R', \vec{j}) = 180^\circ \pm 19.16^\circ$
 主矩:
 $M_O = \sum M_O(\vec{F}) = -3 F_1 - 1.5 P - 3.9 P_2 = -2355\text{kN} \cdot \text{m}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

(2) 求合力及其作用线位置

$$d = \frac{|M_O|}{F_R} = \frac{2355}{709.4} = 3.3197\text{m}$$

$$x = \frac{d}{\cos(90^\circ - 70.84^\circ)} = 3.514\text{m}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

(3) 求合力作用线方程

$$M_O = \sum M_O(\vec{F}_R) = x \cdot F_{Ry} - y \cdot F_{Rx} = x \cdot F_{Ry}' - y \cdot F_{Rx}'$$

$$\Rightarrow -2355 = x(-670.1) - y(232.9)$$

$$\Rightarrow 607.1x - 232.9y - 2355 = 0$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§3-2 平面任意力系平衡方程

一、平面任意力系的平衡方程
 平面任意力系平衡的充要条件是:
 力系的主矢和对任意点的主矩都等于零

$$\vec{F}_R' = 0 \quad M_O = 0$$

$$F_x' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

$$M_O = \sum M_O(\vec{F}_i)$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O = 0 \end{cases}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、平面任意力系的平衡方程

一般形式

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O = 0 \end{cases}$$

平面任意力系平衡的解析条件是: 各力在两个坐标轴上的投影代数和分别等于零, 以及各力对于任意一点的矩的代数和也等于零

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-4: 已知重物的重量为P, 杆AB、BC与滑轮D联接如图所示, 不计滑轮的自重。求支座A处的约束反力以及BC杆所受的力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-4: 已知P, 求A处反力及BC杆受力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$\sum M_A = 0:$

$$F_T \times 0.1 - P \times 0.3 + F_{RB} \sin \alpha \times 0.6 = 0 \Rightarrow F_{RB}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{RAx}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{RAy}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$\sum M_A = 0:$

$$F_T \times 0.1 - P \times 0.3 + F_{RB} \sin \alpha \times 0.6 = 0 \Rightarrow F_{RB}$$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{RAx}$ $\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{RAy}$

$$\sum M_B = 0: F_T r + P \times 0.3 - F_{RAy} \times 0.6 = 0 \Rightarrow F_{RAy}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、二矩式平衡方程

限制条件: 两个矩心连线不得与投影轴垂直

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$\sum M_A = 0: F_T r - P(r + 0.3) + F_{RB} \sin \alpha \times 0.6 = 0 \Rightarrow F_{RB}$

$\sum M_B = 0: F_T r + P \times 0.3 - F_{RAy} \times 0.6 = 0 \Rightarrow F_{RAy}$

$\sum M_E = 0:$

$$-F_T \times 0.5 - P \times 0.3 + F_{RAx} \times 0.6 = 0 \Rightarrow F_{RAx}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、三矩式平衡方程

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$$

限制条件: 三矩心不得共线

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

平面力系平衡方程思路小结

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

平面力系平衡方程思路小结

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$$

选画建列查

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-5 已知: $P_1 = 10\text{kN}$, $P_2 = 40\text{kN}$, 求: 轴承A、B处的约束力

解: 取起重机, 画受力图

$$\sum M_A = 0$$

$$-F_B \cdot 5 - 1.5 \cdot P_1 - 3.5 \cdot P_2 = 0$$

$$F_B = -31\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_B = 0$$

$$F_{Ax} = 31\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{By} - P_1 - P_2 = 0$$

$$F_{By} = 50\text{kN}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-6 已知: $AC=CB=l$, $P=10\text{kN}$; 求: 铰链A和DC杆受力

解: 取AB梁, 画受力图

$$\sum M_A = 0$$

$$F_C \cos 45^\circ \cdot l - P \cdot 2l = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_C \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_C \sin 45^\circ - P = 0$$

解得

$$F_C = 28.28\text{kN}, F_{Ax} = -20\text{kN}, F_{Ay} = -10\text{kN}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-7 已知: $P=100\text{kN}$, $M=20\text{kN}\cdot\text{m}$, $q=20\text{kN/m}$, $F=400\text{kN}$, $l=1\text{m}$; 求固定端A处约束力

解: 取型刚架, 画受力图

其中 $F_1 = \frac{1}{2} q \times 3l = 30\text{kN}$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ax} + F_1 - F \sin 60^\circ = 0 \quad F_{Ax} = 316.4\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{Ay} - P - F \cos 60^\circ = 0 \quad F_{Ay} = 300\text{kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_A - M - F_1 \cdot l + F \cos 60^\circ \cdot l + F \sin 60^\circ \cdot 3l = 0$$

$$M_A = -1188\text{kN}\cdot\text{m}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-8 已知: $P, q, a, M = qa$; 求A、B反力。

解: 取AB梁, 画受力图

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} = 0 \quad F_{Bx} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad F_B \cdot 4a - M - P \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0 \quad F_B = \frac{3}{4} F_{Ay} - \frac{1}{2} qa$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - q \cdot 2a - P + F_B = 0 \quad F_{Ay} = \frac{F_B}{4} + \frac{3}{2} qa$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、平面平行力系的平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_1 \cos \theta - F_2 \cos \theta + F_3 \cos \theta + \dots = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad F_1 \sin \theta - F_2 \sin \theta + F_3 \sin \theta + \dots = 0$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

平面平行力系的方程两种形式

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{各力不得与投影轴垂直} \\ \text{两点连线不得与各力平行} \end{array}$$

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-9 已知: $P_1 = 700\text{kN}, P_2 = 200\text{kN}, AB = 4\text{m}$;
 (1) 起重机满载和空载时不翻倒, 平衡载重;
 (2) $P_3 = 180\text{kN}$, 轨道A给起重机轮子的反力。

解: 取起重机, 画受力图

满载时临界条件为: $F_A = 0$

$$\sum M_B = 0 \quad P_{3\min} \cdot 8 + 2P_1 - 10P_2 = 0$$

$$P_{3\min} = 75\text{kN}$$

空载时临界条件为: $F_B = 0$

$$\sum M_A = 0 \quad 4P_{3\max} - 2P_1 = 0$$

$$F_{3\max} = 350\text{kN}$$

$$75\text{kN} \leq P_3 \leq 350\text{kN}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$P_3 = 180\text{kN}$ 时

$$\sum M_A = 0$$

$$4P_3 - 2P_1 - 14P_2 + 4F_B = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_A + F_B - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

$$F_A = 210\text{kN}$$

$$F_B = 870\text{kN}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§3-3 物体系统平衡

实际工程结构大都由两个或两个以上构件通过一定约束方式连接起来的系统。在工程静力学中构件的模型都是刚体, 所以这种系统称为刚体系统(system of rigidity bodies)或物体系统。

分析刚体系统平衡问题的基本原则与处理单个刚体的平衡问题是一致的, 但有其特点, 其中重要的是要正确判断刚体系统的静定性质, 并选择合适的研究对象。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、静定与超静定概念

前几节所研究的问题中, 作用在刚体上的未知力的数目正好等于独立的平衡方程数目, 应用平衡方程可以解出全部未知量。这类问题称为静定问题(statically determinate problem) 相应的结构称为静定结构(statically determinate structure)。

实际工程结构中, 为了提高结构的强度和刚度, 或者为了其他工程要求, 常常需要在静定结构上, 再加上一一些构件或者约束, 从而使作用在刚体上未知力的数目多于独立的平衡方程数目, 因而仅仅依靠刚体平衡条件不能求出全部未知量。这类问题称为静不定问题(statically indeterminate problem) 相应的结构称为静不定结构(statically indeterminate structure)或超静定结构。

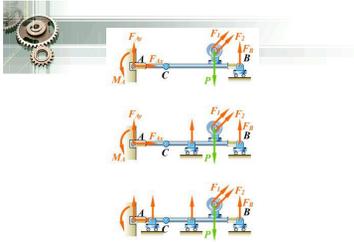
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、静定与超静定概念

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、静定与超静定概念

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、静定与超静定概念

未知内力或反力的数目多于平衡方程的数目称为超静定次数。

对于超静定问题，必须考虑物体因受力而产生的变形，补充某些方程，才能使未知量的数目等于方程的数目。求解超静定问题将在材料力学中介绍。本章将讨论静定的刚体系统的平衡问题。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、物体系统平衡

整体平衡与局部平衡

系统的平衡问题中，若仅考虑整体平衡，其未知约束力的数目多于平衡方程的数目，但是，如果将刚体系统中的构件分开，依次考虑每个构件的平衡，则可以求出全部未知约束力。这种情形下的刚体系统依然是静定的。

求解刚体系统的平衡问题需要将平衡的概念加以扩展，即：系统如果整体是平衡的，则组成系统的每一个局部以及每一个刚体也必然是平衡的。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、物体系统平衡

分清内力和外力

内力和外力是相对的，需视选择的研究对象而定。研究对象以外的物体作用于研究对象上的力称为外力(external force)。研究对象内部各部分间的相互作用力称为内力(internal force)。内力总是成对出现，它们大小相等、方向相反、作用作用在同一直线上。

考虑以整体为研究对象平衡时，由于内力在任意轴上的投影之和以及对任意点的力矩之和均为零，因而不必考虑。但是，一旦将系统拆开，以局部或单个刚体作为研究对象时，在拆开处，原来的内力变成了外力，建立平衡方程时，必须考虑这些力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-10

图示曲柄滑块机构中，已知 F ， $OA=R$ ， $AB=l$ ，不计物体自重与摩擦系统在图示位置平衡。求驱动力矩 M 的大小，轴承 C 处的约束力，连杆 AB 受力，冲头给导轨的侧压力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-10已知 F ， $OA=R$ ， $AB=l$ ，求驱动力矩 M ， C 处反力， AB 受力，冲头给导轨的侧压力。

解：取冲头 B 画受力图

$$\sum F_y = 0 \quad F - F_B \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_N - F_B \sin \alpha = 0$$

$$F_B = \frac{F}{\cos \alpha} = \frac{Fl}{\sqrt{l^2 - R^2}}$$

$$F_N = F \tan \alpha = \frac{FR}{\sqrt{l^2 - R^2}}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

取轮O画受力图

$$\sum M_O = 0 \quad F_A \cos \alpha \cdot R - M = 0$$

$$F_A = F_B = \frac{F}{\cos \alpha} \quad M = FR$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ox} + F_A \sin \alpha = 0$$

$$F_{Ox} = -\frac{FR}{\sqrt{l^2 - R^2}}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Oy} + F_A \cos \alpha = 0$$

$$F_{Oy} = -F$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例题 3-11

结构由杆 AB 与 BC 在 B 处铰接而成。结构 A 处为固定端， C 处为辊轴支座。结构在 D 段承受均布载荷作用，载荷集度为 q ； B 处作用有外加力偶 M 。若 q 、 l 、 M 均为已知，试求 A 、 C 二处的约束力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例题 3-11

考察结构整体，在固定端处有个约束力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和 M_A ，在辊轴支座处有个垂直方向的约束力 F_C 。整体的3个平衡方程，无法确定所要求解个未知力。为此，必须选部分为研究对象。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例题 3-11

杆A的A、B二处作用有约束力，故杆AB不宜最先选作平衡对象。杆BC的B、C二处共两个未知约束力，可单个独立平衡方程确定。因此，先以杆为平衡对象。

求得BC上的约束力后，再应用两处部分约束力互为作用与反作用关系，考察杆A的平衡，即可求得处的约束力。

也可以在确定了C处的约束力之后再考察整体平衡也可以求得处的约束力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例题 3-11

先考察BC杆的平衡，由

$$\sum M_B(F_i) = 0$$

$$F_{RC} \times 2l - M - ql \times \frac{l}{2} = 0$$

求得

$$F_{RC} = \frac{M}{2l} + \frac{ql}{4}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例题 3-11

再考察整体平衡：

$$F_{Ax} = \frac{M}{2l} + \frac{ql}{4}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - 2ql + F_{RC} = 0 \quad F_{Ay} = \frac{7}{4}ql - \frac{M}{2l}$$

$$\sum M_A = 0 \quad M - 2ql \times 2l - M + F_{RC} \times 4l = 0 \quad M_A = 3ql^2 - M$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例题 3-11

注意：

考察刚体系统的平衡问题，局部平衡对象的选择并不是唯一的。选择平衡对象，取决于正确的受力分析与正确地比较独立的平衡方程数和未知量数。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3-12 课堂练习

$F=20\text{kN}$ $q=10\text{kN/m}$ $M=20\text{kN}\cdot\text{m}$ $l=1\text{m}$;
求A、B处的约束反力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$F=20\text{kN}$, $q=10\text{kN/m}$, $M=20\text{kN}\cdot\text{m}$, $l=1\text{m}$;
求 A、B 处的约束力

解：取 CD 梁画受力图

$$\sum M_C = 0$$

$$F \sin 60^\circ \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} - F \cos 30^\circ \cdot 2l = 0$$

$\Rightarrow F_B = 45.77\text{kN}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

取整体画受力图

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ax} - F_B \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{Ay} - 2ql + F_B \sin 60^\circ - F \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_A - M - 2ql \cdot 2l + F_B \sin 60^\circ \cdot 3l - F \cos 30^\circ \cdot 4l = 0$$

$\Rightarrow M_A = 10.37\text{kN}\cdot\text{m}$ $F_{Ax} = 32.89\text{kN}$ $F_{Ay} = -2.32\text{kN}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-13

已知 $P_2 = 2P_1$, $P_1 = 20P_1$, $r_1 R = 2r_2$, $\alpha = 20^\circ$;

求
物C匀速上升时，作用于小轮上的力偶矩M；轴承A、B处的约束力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解：取塔轮及重物C，画受力图

$$\sum M_B = 0 \quad P_1 r - F R = 0 \quad F = \frac{Pr}{R} = 10P_1$$

由 $\frac{F}{P} = \tan 20^\circ$

$$F_1 = F \tan 20^\circ = 3.64P_1$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Bx} - F_1 = 0$$

$$F_{Bx} = 3.64P_1$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{By} - P - P_2 - F = 0 \quad F_{By} = 32P_1$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

取小轮，画受力图

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad F_{Bx} + F'_x = 0 & \quad F_{Bx} = -3.64P \\ \sum F_y = 0 & \quad F_{By} + F' - P_1 = 0 & \quad F_{By} = -9P_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 & \\ M - F' \cdot r = 0 & \\ M = 10P_1 r & \end{aligned}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

平面机构中， $AB=DF$ ， $\theta=30^\circ$ ，各杆自重不计，受力及尺寸如图，求各杆在B、C和D点给予平台的力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-14

已知 $P=60\text{kN}$ ， $P_1=20\text{kN}$ ， $P_2=10\text{kN}$ ，风载 $f=10\text{kN}$ ，尺寸如图

求A、B处的约束力

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解 取整体画受力图

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 & \quad 12F_{By} - 10P - 6P_1 - 4P_2 - 2P - 5F = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad F_{Ay} + F_{By} - 2P - P_1 - P_2 = 0 \\ \sum F_x = 0 & \quad F_{Ax} + F - F_{Bx} = 0 \end{aligned}$$

$F_{Ay} = 72.5\text{kN}$
 $F_{By} = 77.5\text{kN}$
 $F_{Ax} = F_{Bx} = F$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

取吊车梁画受力图

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0 & \quad 8F'_x - 4P_1 - 2P_2 = 0 & \quad F'_x = 12.5\text{kN} \\ \sum M_C = 0 & \\ 6F_{By} - 10F_{Bx} - 4(P + F'_x) = 0 & \\ F_{Bx} = 17.5\text{kN} & \quad F_{By} = 7.5\text{kN} \end{aligned}$$

取右边刚架画受力图

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例3-15

已知 $DC=CE=CA=CB=2l$ ， $R=2r=l$ ，各构件重不计 $\theta=45^\circ$

求A、E处约束力及BD杆受力

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解 取整体画受力图

$$\begin{aligned} \sum M_E = 0 & \\ -F_A \cdot \sqrt{2} \cdot 2l - P \cdot \frac{5}{2}l = 0 & \\ F_A = -\frac{5\sqrt{2}}{8}P & \\ \sum F_x = 0 & \\ F_{Ex} + F_A \cos 45^\circ = 0 & \\ F_{Ex} = \frac{5}{8}P & \\ \sum F_y = 0 & \quad F_{Ey} - P + F_A \sin 45^\circ = 0 & \quad F_{Ey} = \frac{13}{8}P \end{aligned}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

取DCE杆画受力图 $\sum M_C = 0$

$$-F_{DB} \cos 45^\circ \cdot 2l - F_K \cdot l + F_{Ex} \cdot 2l = 0$$

$$F_{DB} = \frac{3\sqrt{2}}{8}P$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3-16 课堂练习

已知： $P_1=4\text{kN}$ ， $P_2=10\text{kN}$ ，尺寸如图；求：BC杆受力及铰链A受力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$F_1 = 4\text{kN}, F_2 = 10\text{kN}$, 求: BC 杆受力及铰链 A 受力.

解: 取 AB 梁, 画受力图

$\sum M_A = 0$

$F_1 \sin 30^\circ \cdot 6 - 4P_2 - 3P_1 = 0$

$F_2 = 17.33\text{kN}$

$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} - F_2 \cos 30^\circ = 0$

$F_{Ax} = 5\text{kN}$

$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} = 5.33\text{kN}$

$F_{Ay} - P_1 - P_2 + F_2 \sin 30^\circ = 0$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例 3-17 已知: $P=10\text{kN}$, a , 杆、轮重不计;

求: A, C 支座处约束力

解: 取整体, 受力图能否这样画?

取整体, 画受力图

$\sum M_c = 0 \quad 4aF_{Ax} + 8.5aP - F_{Ay}a = 0$

解得 $F_{Ax} = -20\text{kN}$

$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_{Cx} = 0$

解得 $F_{Cx} = 20\text{kN}$

$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_{Cy} + F_T - P = 0$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

取 BDC 杆 (带着轮)

$\sum M_b = 0$

$4aF_{Cy} + F_T \cdot 3a + F_2 \cdot a - F_{Cx} \cdot 4a = 0$

解得 $F_{Cy} = 15\text{kN} \quad F_{Cx} = -10\text{kN}$

取 BDC 杆 (不带轮) 取 ABE (带着轮) 取 ABE 杆 (不带轮)

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例 3-18 已知: P, a , 各杆重不计;

求: B 铰处约束力

解: 取整体, 画受力图

$\sum M_b = 0 \quad -F_{By} \cdot 2a = 0$

解得 $F_{By} = 0$

取 DEF 杆, 画受力图

$\sum M_d = 0 \quad F_E \sin 45^\circ \cdot a - F \cdot 2a = 0$

$\sum F_x = 0 \quad F_E \cos 45^\circ - F_{Dx} = 0 \quad F_E \sin 45^\circ = 2F$

$\sum M_e = 0 \quad F_{Dy} \cdot a - F \cdot 2a = 0 \quad F_{Dy} = F_E \cos 45^\circ = 2F$

$F_{Dx} = 2F$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

ADB 杆受力

$\sum M_a = 0$

$F_{Dx} \cdot 2a + F_{Dy} \cdot c$

得 $F_{Dx} = -F$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例 3-19 已知: a, b, P , 各杆重不计, C, E 处光滑;

求证: AB 杆始终受压, 且大小为 P .

解: 取整体, 画受力图

$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} = 0$

$\sum M_e = 0 \quad P \cdot (b-x) - F_{By} \cdot b = 0$

得 $F_{By} = \frac{P}{b}(b-x)$

取销钉 A , 画受力图

$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_{ADx} = 0$

$\sum F_y = 0 \quad F_{AB} + F_{Ay} + F_{ADy} = 0$

得 $F_{ADx} = 0$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

取 BC , 画受力图

$\sum M_b = 0 \quad F'_C \cdot b - Px = 0$

得 $F'_C = \frac{x}{b}P$

取 ADC 杆, 画受力图

$\sum M_b = 0 \quad F_{ADCy} \cdot \frac{b}{2} - F'_C \cdot \frac{b}{2} = 0$

得 $F_{ADCy} = F'_C = \frac{x}{b}P$

解得 $F_{AB} = -P$ (压)

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§3-5 摩擦

梯子不滑倒的最大倾角

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§3-5 摩擦

钢丝不滑脱的最大直径

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§3-5 摩擦

夹持器的最小倾角

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§3-5 摩擦

磨削工具利用摩擦力

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§3-5 摩擦

利用摩擦力锚泊船

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§3-5 摩擦

刹车器利用摩擦力

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§3-5 摩擦

轴承

轴承中摩擦力越小越好

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§3-5 摩擦

赛车后轮的摩擦力是驱动力

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§3-5 摩擦

摩擦(friction)是一种普遍存在于机械运动中的自然现象。实际机械与结构中，完全光滑的表面并不存在。两物体接触面之间一般都存在摩擦。在自动控制、精密测量等工程中即使摩擦很小，也会影响到仪器的灵敏度和精确度，因而必须考虑摩擦的影响。

研究摩擦就是要充分利用有利的一面，克服其不利的一面。

按照接触物体之间可能会相对滑动或相对滚动，有滑动摩擦和滚动摩擦之分。根据接触物体之间是否存在润滑剂，滑动摩擦又可分为干摩擦和湿摩擦。本课程只介绍干摩擦时，物体的平衡问题。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

1. 滑动摩擦——库仑定律

考察质量为 m 、静止地放置于水平面上的物块，设二者接触面都是光滑面。在物块上施加水平力 F ，并令其自零开始连续增大，使物块具有相对滑动的趋势。因为是非光滑面接触，故作用在物块上的约束力除法向力 F_N 外，还有一分力与运动趋势相反的力，称为静滑动摩擦力，简称静摩擦力static friction force，用 F_p 表示。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

1. 滑动摩擦——库仑定律

当 $F_p = 0$ 时，由于二者无相对滑动趋势，故静摩擦力 $F_p = 0$ 。当 F_p 开始增加时，静摩擦力 F_p 随之增加，直至 $F_p = F$ 时，物块仍然保持静止。 F_p 再继续增加，达到某一临界值 F_{pmax} 时，摩擦力达到最大值 $F_p = F_{pmax}$ 。这时，物块开始沿 F_p 的作用方向滑动。

物块开始运动后，静滑动摩擦力突变为动滑动摩擦力。此后，主动力 F 的数值若再增加，则摩擦力基本上保持为常值。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

1、滑动摩擦——库伦定律

根据库仑(Coulomb)摩擦定律, 最大静摩擦力(maximum static friction force)与正压力成正比, 其方向与相对滑动趋势的方向相反, 而与接触面积的大小无关。

$$F_{s,max} = f_s F_N$$

式中, f_s 称为静摩擦因数(static friction factor)。静摩擦因数 f_s 主要与材料和接触面的粗糙程度有关, 可在机械工程手册中查到, 但由于影响摩擦因数的因素比较复杂, 所以如果需要较准确的数值, 则应由实验测定。

上述分析表明, 开始运动之前, 即物体保持静止时, 静摩擦力的数值在零与最大静摩擦力之间, 即

$$0 \leq F_s \leq F_{s,max}$$

从约束的角度, 静滑动摩擦力也是一种约束力, 而且是在一定范围内取值的约束力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

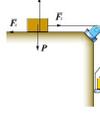
1、滑动摩擦——库伦定律

$$\sum F_x = 0 \quad F_y - F_s = 0 \quad F_s = F_T$$

静滑动摩擦力的特点

方向: 沿接触处的公切线, 与相对滑动趋势反向;

大小: $0 \leq F_s \leq F_{s,max}$

$$F_{s,max} = f_s F_N \quad (\text{库仑摩擦定律})$$


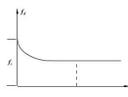
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

1、滑动摩擦——库伦定律

动滑动摩擦力的特点

方向: 沿接触处的公切线, 与相对滑动趋势反向

大小: $F_d = f_d F_N$
 $f_d < f_s$
 (对多数材料, 通常情况下)



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

2、摩擦角和自锁现象

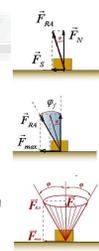
$F_{R,t}$ --- 全反力

物体处于临界平衡状态时, 全反力和法线间的夹角——摩擦角

$$\tan \varphi_f = \frac{F_{max}}{F_N} = \frac{f_s F_N}{F_N} = f_s$$

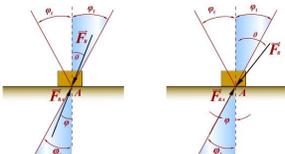
全反力和法线间的夹角的正切等于静滑动摩擦因数。

摩擦锥 $0 \leq \varphi \leq \varphi_f$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

自锁现象



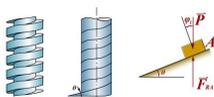
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

斜面自锁条件 $\theta \leq \varphi_f$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

螺纹自锁条件 $\theta \leq \varphi_f$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3、考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

考虑摩擦时的平衡问题, 与不考虑摩擦时的平衡问题有着共同特点, 即: 物体平衡时应满足平衡条件, 解题方法与过程也基本相同。

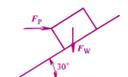
但是, 这类平衡问题的分析过程也有其特点:

- 首先, 受力分析时必须考虑摩擦力, 而且要注意摩擦力的方向与相对滑动趋势的方向相反;
- 其次, 在滑动之前, 即处于静止状态时, 摩擦力不是一个定值, 而是在一定的范围内取值。

$$0 \leq F_s \leq F_{s,max}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例题 28



放置于斜面上的物块重 $G = 1000 \text{ N}$; 斜面倾角为 30° 。物块承受一方向自在左右的水平推力, 其数值为 $F = 400 \text{ N}$ 。若已知物块与斜面之间的摩擦因数 $f = 0.2$ 。

求: 1. 物块处于静止状态时, 静摩擦力的大小和方向;
 2. 使物块向上滑动时, F 的最小值。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例题 28

解: 根据本例的要求需要判断物块是否静止。这一类问题的解法是: 假设物体处于静止状态, 首先由平衡方程求出静摩擦力法向反力 F_s , 再求出最大静摩擦力 $F_{s,max}$ 将与 F_s 加以比较, 若

$$|F_s| \leq F_{s,max}$$

物体处于静止状态, 所求有意义, 若 $|F_s| > F_{s,max}$ 物体已进入运动状态, 所求无意义。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例题 28

解: 1. 确定物块静止时的摩擦系数

以物块为研究对象, 假设物块处于静止状态, 并有向上滑动的趋势, 受力如图示, 其中摩擦力的指向是假设的, 若结果为负, 表明实际指向与假设方向相反, 由

$$\sum F_x = 0 \quad -F - F_s \sin 30^\circ + F_N \cos 30^\circ = 0 \quad F = -153.6 \text{ N}$$

负号表示实际摩擦力的指向与图中所设方向相反, 即物体实际有下滑的趋势, 摩擦力的方向实际上是沿斜面向上的。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例题 28

解: 1. 确定物块静止时的摩擦系数

$$\sum F_x = 0 \quad -F - F_s \sin 30^\circ + F_N \cos 30^\circ = 0 \quad F = -153.6 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_N - F_s \cos 30^\circ - F_N \sin 30^\circ = 0 \quad F_N = 1066 \text{ N}$$

最大静摩擦力为 $F_{s,max} = f_s F_N = 0.2 \times 1066 \text{ N} = 213.2 \text{ N}$

$$|F| < F_{s,max}$$

因此, 物块在斜面上静止; 摩擦力大小约为 3.6 N, 其指向沿斜面向上。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例题 28

解: 2. 确定物块向上滑动时所需要主动力的最小值 F_{min}



建立平衡方程和关于摩擦力的物理方程:

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{min} - F_s \sin 30^\circ + F_N \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_N - F_s \cos 30^\circ - F_{min} \sin 30^\circ = 0$$

$$F_{s,max} = f_s F_N$$

联立, 解得: $F_{min} = 878.75 \text{ N}$

当力 F 的数值超过 878.75 N 时, 物块将沿斜面向上滑动。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例题 29

梯子的上端靠在铅垂的墙壁上, 下端搁置在水平地面上。假设梯子与墙壁之间为光滑约束, 而与地面之间为非光滑约束。已知: 梯子的重力为 W 。

1. 设梯子在倾角 α 的位置保持平衡, 求 A、B 二处约束力 F_{NA} 、 F_{NB} 和摩擦力 F_{sA} 。

2. 若使梯子不致滑倒, 求倾角的范围。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例题 29

解: 1 梯子于倾角 α 的位置保持平衡时的约束力

梯子的受力如图示, 其中将摩擦力作为一般的约束力, 假设其方向如图示, 于是有

$$\sum M_A(F) = 0, \quad W \times \frac{l}{2} \cos \alpha - F_{NB} \times l \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{sA} - W = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_N + F_{sA} = 0$$

$$F_{sA} = \frac{W \cos \alpha}{2 \sin \alpha}, \quad F_{NA} = F_N, \quad F_N = -F_{sA} = -\frac{W}{2} \cot \alpha$$

所得 F_N 的结果为负值, 表明梯子下端所受的摩擦力与图中所假设的方向相反。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例题 29

解: 2. 求梯子不滑倒的倾角的范围

这种情形下, 摩擦力 F_s 的方向必须根据梯子在地上的滑动趋势预先确定, 不能任意假设。

平衡方程和物理方程分别为

$$\sum M_A(F) = 0, \quad W \times \frac{l}{2} \cos \alpha + F_{sA} \times l \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{sA} - W = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_N - F_{sA} = 0$$

$$F_{sA} = f_s F_{NA}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例题 29

解: 2. 求梯子不滑倒的倾角的范围

$$\sum M_A(F) = 0, \quad W \times \frac{l}{2} \cos \alpha + F_{sA} \times l \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{sA} - W = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_N - F_{sA} = 0$$

$$F_{sA} = f_s F_{NA}$$

联立, 不仅可以解出 A、B 二处的约束力, 而且可以确定保持梯子平衡时的临界倾角

$$\alpha = \arccot(2f_s)$$

由常识可知, 角度越大, 梯子越易保持平衡, 故平衡时梯子对地面的倾角范围为

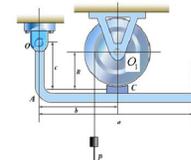
$$\alpha \geq \arccot(2f_s)$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



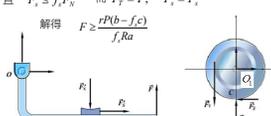
例题 30

物块重 P , 鼓轮重心位于 O 处, 闸杆重量不计, 已知静摩擦系数 f_s 各尺寸如图示。求制动鼓轮所需铅直力 F 。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

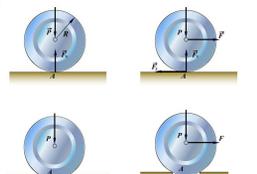
解：分别取两杆与鼓轮为研究对象：
 设鼓轮被制动处于平衡状态
 对鼓轮， $\Sigma M_O = 0 \quad rF_r - RF_i = 0$
 对两杆， $\Sigma M_O = 0 \quad Fa - F_r'b - F_r'c = 0$
 且 $F_r' \leq f_s F_N'$ 而 $F_r = P, \quad F_r' = F_i$
 解得 $F \geq \frac{rP(b-fc)}{f_s Ra}$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

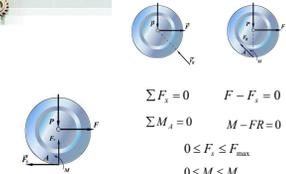
4、滚动摩擦(擦)的概念

静滚动摩擦(擦)



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

静滚动摩擦(擦)



$$\Sigma F_x = 0 \quad F - F_s = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad M - FR = 0$$

$$0 \leq F_s \leq F_{s,max}$$

$$0 \leq M \leq M_{max}$$

$F_{max} = f_s F_N, \quad M_{max} = \delta F_N$ 最大滚动摩擦(擦)力偶

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

静滚动摩擦(擦)

δ 滚动摩擦(擦)系数 长度量纲

δ 的物理意义



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

使圆轮滚动比滑动省力的原因

处于临界滚动状态
 $M_{max} = \delta F_N = F_1 R \quad F_1 = \frac{\delta}{R} F_N$

处于临界滑动状态
 $F_{max} = f_s F_N = F_2 \quad F_2 = f_s F_N$

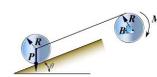
一般情况下, $\frac{\delta}{R} < f_s$ 或 $\frac{\delta}{R} \ll f_s \Rightarrow F_1 < F_2$ 或 $F_1 \ll F_2$

例：某型号车轮半径, $R = 450\text{mm}$
 混凝土路面 $\delta = 3.15\text{mm} \quad f_s = 0.7$
 $\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{\delta}{R}}{f_s} = \frac{0.7 \times 350}{3.15} = 100$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例题31

已知: P, R, θ, δ ;



求: (1) 使系统平衡时, 力偶距 M_A ;
 (2) 圆柱O匀速纯滚动时, 静滚动摩擦系数的最小值。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解: (1) 设圆柱O有向下滚动趋势, 取圆柱O

$$\Sigma M_A = 0$$

$$P \sin \theta \cdot R - F_{T,max} \cdot R - M_{1,max} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_{N1} - P \cos \theta = 0$$

又 $M_{1,max} = \delta F_{N1}$
 联立解得 $F_{T,max} = P(\sin \theta - \frac{\delta}{R} \cos \theta)$

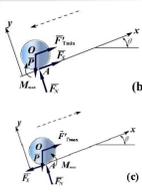
设圆柱O有向上滚动趋势, 取圆柱O

$$\Sigma M_A = 0$$

$$P \sin \theta \cdot R - F_{T,max} \cdot R + M_{2,max} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_{N2} - P \cos \theta = 0$$

又 $M_{2,max} = \delta F_{N2}$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

联立解得 $F_{T,max} = P(\sin \theta + \frac{\delta}{R} \cos \theta)$

系统平衡时 $P(R \sin \theta - \delta \cos \theta) \leq M_B \leq P(R \sin \theta + \delta \cos \theta)$

(2) 设圆柱O有向下滚动趋势 图b

$$\Sigma M_O = 0 \quad F_T \cdot R - M_{max} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_{N1} - P \cos \theta = 0$$

又 $M_{max} = \delta F_{N1}$
 解得 $F_T = \frac{\delta}{R} P \cos \theta$

只滚不滑时, 应有 $F_T \leq f_s F_{N1} = f_s P \cos \theta$ 则 $f_s \geq \frac{\delta}{R}$

同理, 圆柱O有向上滚动趋势时, 图c
 得 $f_s \geq \frac{\delta}{R}$ 圆柱匀速纯滚动时, $f_s \geq \frac{\delta}{R}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

分析和处理刚体系统平衡问题时, 注意以下几方面:

- 认真理解、掌握并能灵活运用系统整体平衡, 组成系统的每个局部必然平衡的重要概念。
- 某些受力分析, 从整体上看, 可以使整体保持平衡, 似乎是正确的, 但却不能保证每一个局部都是平衡的, 因而是错误的。
- 要灵活选择研究对象

所谓研究对象包括系统整体、单个刚体以及由两个或两个以上刚体组成的子系统。灵活选择其中之一或之二作为研究对象, 一般应遵循的原则是: 尽量使一个平衡方程中只包含一个未知的力, 不解或少解联立方程。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

- 注意区分内约束力与外约束力、作用与反作用力。
内约束力只有在系统拆开时才会出现，故而在考察整体平衡时，无需考虑内约束力，也无需画出内约束力。
当同一约束处有两个或两个以上刚体相互连接时，为了区分作用在不同刚体上的约束力是否互为作用与反作用力，必须对相关刚体逐个分析，分清哪一个刚体是施力体，哪一个刚体是受力体。
- 注意对主动分布载荷进行等效简化
考察局部平衡时，分布载荷可以在拆开之前简化，也可以在拆开之后简化。要注意的是，先简化、后拆开时，简化后合力加在何处才能满足力系等效的要求。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

关于摩擦角的两点结论：

- ▣ 摩擦角是静摩擦力取值范围的几何表示
- ▣ 三维受力状态下，摩擦角变为摩擦锥。

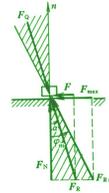


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

自锁及其应用

主动力作用线位于摩擦角范围内时，不管主动力多大，物体都保持平衡，这种现象称为自锁。

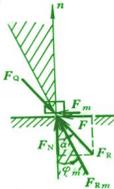


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

自锁及其应用

主动力作用线位于摩擦角范围以外时，不管主动力多小，物体都将发生运动。

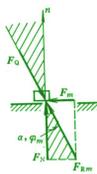


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

自锁及其应用

主动力作用线与法线之间的夹角等于摩擦角时物体处于临界状态。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

正确地进行直观判断，根据平衡的基本原理，可以不通过建立平衡方程，而直接确定某些未知力，甚至全部约束力。这在工程中，特别是现场工程分析中，是很重要的。同时，正确的直观判断，有利于保证理论分析与计算结果的正确性。

正确的直观判断，必须以平衡概念为基础，同时正确应用对称结构受力的对称性和反对称性。

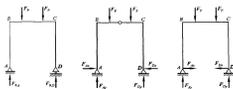
所谓对称结构，是指如果结构存在对称轴（平面问题）或对称面（空间问题），结构的几何形状、几何尺寸以及结构的约束，都对称于对称轴（平面问题）或对称面（空间问题）。

对称结构若承受对称载荷，则其约束力必然对称于对称轴；对称结构若承受反对称载荷，则其约束力必然是反对称的。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

对称结构若承受对称载荷，则其约束力必然对称于对称轴
对称结构若承受反对称载荷，则其约束力必然是反对称的。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第五章 运动学基础

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第2篇 运动学

运动学 (kinematics) 研究物体在空间的位置随时间的变化, 即物体运动的几何性质, 但是不涉及引起运动的原因。

运动学涉及运动分析的基本概念、基本理论和基本方法。这些内容不仅是运动学的基础, 也是动力学 dynamics 的基础。

运动学的研究对象是质点和刚体。

物体的运动都是相对的, 因此研究物体的运动必须指明参考体和参考系。

物体运动的位移、速度和加速度都是矢量, 因此研究运动学采用矢量方法。一般情况下, 这些矢量的大小和方向会随着时间的变化而变化, 因而称为变矢量。变矢量运算与常矢量有相同之处, 也有不同之处, 这是学习运动学的难点。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§5-1 点的运动学

一、基本概念

1. 参考系
根据运动的相对性, 研究物体的运动, 必须选取另一个物体作为参考, 这一物体称为参考体(reference body) 与参考体固连的坐标系称为参考系(reference system)
参考体是一个大小有限的物体, 而参考系则理解为与参考体固连的整个坐标空间。
2. 运动方程 $\vec{r} = \vec{r}(t)$
3. 速度 描述运动快慢和方向 \vec{v}
4. 加速度 表征速度大小和方向的变化 \vec{a}

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、描述点的运动的矢量法

选取坐标原点O向点P作矢量 \vec{r} , 称为点P对于原点O的位置矢量 (position vector), 简称位矢或矢径。当点运动时, 位矢也随该点一起运动, 且为时间的单值函数:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$r = r(t)$ 是用变矢量表示的点的运动方程。点在运动过程中, 其位置矢量的端点描绘出一条连续曲线, 称为位矢端图 (hodograph of position vector)。显然, 位矢端图就是点P的运动轨迹 (trajectory)。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、描述点的运动的矢量法

在时间间隔 Δt 内, 点由位置 P 运动到 P'

t 瞬时 矢径 $r(t)$
 $t + \Delta t$ 瞬时 矢径 $r(t + \Delta t)$
 矢 $r(t) + \Delta r(t)$

$\Delta r(t)$ 时间间隔内矢径的改变量称为点的位移

$r(t) = r(t + \Delta t) - r(t)$

t 瞬时的速度

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

其方向沿轨迹切线方向, 指向点的运动方向。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、描述点的运动的矢量法

t 瞬时 速度 $v(t)$
 $t + \Delta t$ 瞬时速度 $v(t + \Delta t)$
 或 $v(t) + \Delta v(t)$

$\Delta v(t)$ 时间间隔内速度的改变量

$\Delta v(t) = v(t + \Delta t) - v(t)$

t 点在 t 瞬时的加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \quad \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

速度和加速度都是变矢量。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、描述点的运动的矢量法

运动方程 $\vec{r} = \vec{r}(t)$

速度 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

单位 m/s

加速度 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}}$

单位 m/s^2

速度矢径矢端曲线切线

加速度矢端曲线切线

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、描述点的运动的直角坐标法

运动方程

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

直角坐标与矢径坐标之间的关系

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、描述点的运动的直角坐标法

动点在空间的位置可以用矢径 \vec{r} 表示, 也可由三个坐标方程确定:

$$\begin{cases} x = f_x(t) \\ y = f_y(t) \\ z = f_z(t) \end{cases}$$

矢径 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

点的速度为: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) + (x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}})$

考虑到在任意时刻定参考系中, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 均为常矢量 $\dot{\vec{i}} = \dot{\vec{j}} = \dot{\vec{k}} = 0$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

点速度矢量在直角坐标轴上的投影等于点的相应坐标对时间的一阶导数。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

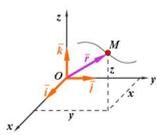
三、描述点的运动的直角坐标法

$$\text{速度 } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

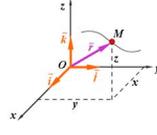
加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、描述点的运动的直角坐标法

点的速度和加速度均可按平方项求和公式求解。

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}, a_z = \ddot{z}$$

点的加速度矢量在直角坐标轴上的投影等于点的相应坐标对时间的二阶导数。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、描述点的运动的直角坐标法

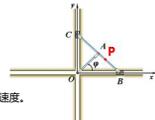
例5-1: 椭圆规机构

$\omega = \dot{\varphi} = \text{常数}$

$OA = AB = AC = l, BP = d$

求P点的运动方程、速度、加速度。

1. 建立固定参考系Oxy;
2. 将所考察的点置于坐标系中的一般位置;
3. 根据已知的约束条件列写点的运动方程。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例5-1: 椭圆规机构

$\omega = \dot{\varphi} = \text{常数}$

$OA = AB = AC = l, BP = d$

求P点的运动方程、速度、加速度。

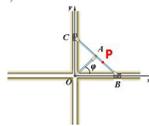
P点的运动方程:

$$x = (2l - d)\cos\varphi = (2l - d)\cos\omega t$$

$$y = d \sin\varphi = d \sin\omega t$$

从中消去t得到P点的轨迹方程

$$\left(\frac{x}{2l-d}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2 = 1$$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

P点的运动方程:

$$x = (2l - d)\cos\varphi = (2l - d)\cos\omega t$$

$$y = d \sin\varphi = d \sin\omega t$$

P点的速度:

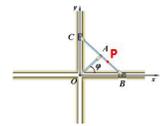
$$v_x = \dot{x} = -\omega(2l - d)\sin\omega t$$

$$v_y = \dot{y} = \omega d \cos\omega t$$

P点的加速度:

$$a_x = \ddot{x} = -\omega^2(2l - d)\cos\omega t$$

$$a_y = \ddot{y} = -\omega^2 d \sin\omega t$$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

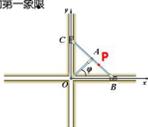
讨论

1. 建立运动方程时, 一定要将所考察的点置于坐标系中的一般位置;

对于直线坐标, 位于坐标轴的正向;
对于直角坐标系, 位于坐标系的第一象限

2. 关于加速度的性质:

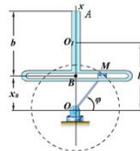
何时作加速度运动?
何时作减速度运动?



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例5-2

正弦机构如图所示。曲柄OM长为r, 绕O轴匀速转动, 与水平线间的夹角为 $\varphi = \omega t + \theta$, 其中 θ 为 $t = 0$ 时的夹角, ω 为常数。已知动杆上A, B两点间距离为b, 求点A和B的运动方程及点B的速度和加速度。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例5-2: 曲柄OM长r, $\varphi = \omega t + \theta$, A, B两点间距离为b, 求点A和B的运动方程及点B的速度和加速度。

解: A, B点都作直线运动, 取Ox轴如图所示。

运动方程

$$x_A = b + r \sin\varphi = b + r \sin(\omega t + \theta)$$

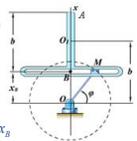
$$x_B = r \sin\varphi = r \sin(\omega t + \theta)$$

B点的速度和加速度

$$v_B = \dot{x}_B = r\omega \cos(\omega t + \theta)$$

$$a_B = \ddot{x}_B = -r\omega^2 \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 x_B$$

点A的速度和加速度?



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

周期运动

$x(t+T) = x(t) \quad f = \frac{1}{T}$ 频率

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例5-3 如图所示,当液压减振器工作时,它的活塞在套筒内作直线往复运动。设活塞的加速度 $\ddot{x} = -k\dot{x}$ (\dot{x} 为活塞的速度, k 为比例常数,初速度为 \dot{x}_0)。求活塞的运动规律。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $\ddot{x} = -k\dot{x}, v|_{t=0} = v_0$ 求: $x(t)$ 。

解: 活塞作直线运动。取坐标轴 Ox 如图所示

由 $a = \frac{dv}{dt} = -k\dot{x}$ 得 $\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt$

$\ln \frac{v}{v_0} = -kt, v = v_0 e^{-kt}$

由 $v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$

$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt$

$x = x_0 + \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例5-4 图示机构中 OA 和 O_1B 分别绕 O 和 O_1 轴转动,用十字滑块 D 将两杆连接。运动过程中两杆保持垂直。已知 $OO_1 = a, \varphi = kt$, 式中 k 为常数。求滑块 D 的速度和相对于 OA 的速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、描述点的运动的弧坐标法

如果已知点的轨迹,则在轨迹上任取一点为原点,运动的点 P 至原点的弧长 $s = OP$, 并且规定: 原点的某一侧弧长为正,另一侧为负。这种具有确定正负号的弧长 s 称为 P 点的弧坐标(arc coordinate of a directed curve), 弧坐标 s 完全确定了动点 P 在轨迹上的位置。

1、弧坐标: 点运动时,其弧坐标随时间而变化:
动点 P 的弧坐标形式的运动方程的特点: $s = s(t)$

- 1) 有坐标原点一般在轨迹上任选一参考点作为坐标原点
- 2) 有正、负方向一般以点的运动方向作为正街
- 3) 有相应的坐标系。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、描述点的运动的弧坐标法

2、弧坐标中的速度表示

$v = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{dr}{ds} = s\tau \quad \frac{dr}{ds} = \tau$

$|\tau| = \left| \frac{dx}{ds} \right| = \left| \frac{dy}{ds} \right| = 1 \quad \frac{ds}{dt} = s = v$

点的速度在切线轴上的投影等于弧坐标对时间的一阶导数。

- 若 $s > 0$, 则 $v > 0$, 则点沿着 s 的方向运动;
- 反之点沿着 s 的反方向运动;
- $v = v\tau$ 中 v 和 τ 分别表示速度的大小与方向。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、描述点的运动的弧坐标法

3、弧坐标中的加速度表示

根据加速度的定义以及弧坐标中速度的表达式

$a = \dot{v}, v = v\tau$

$a = \dot{v}\tau + v\dot{\tau}$

$\dot{\tau} = ?$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、描述点的运动的弧坐标法

3、弧坐标中的加速度表示

$a = \dot{v}\tau + v\dot{\tau} \quad \dot{\tau} = ?$

$\dot{\tau} = \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\tau}{ds}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \text{曲率} \quad \frac{ds}{dt} = s = v, \quad \frac{d\tau}{ds} = ?$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、描述点的运动的弧坐标法

3、弧坐标中的加速度表示

$\left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\tau}{\Delta\varphi} \right| = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1$

当 $\Delta\varphi \rightarrow 0$ 时, 的极限方向垂直于 τ , 亦即 in 方向。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、描述点的运动的弧坐标法

3. 弧坐标中的加速度表示

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \right| = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\varphi} \right| = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{2l \left| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right|}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1$$

当 $\Delta\varphi \rightarrow 0$ 时, 的极限方向垂直于, 亦即 n 方向.

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} = \mathbf{n}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、描述点的运动的弧坐标法

3. 弧坐标中的加速度表示

$$\mathbf{a} = \dot{v}_t \mathbf{r} + v_t \dot{\mathbf{r}} \quad \dot{\mathbf{r}} = ?$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{n}$$

$$\frac{ds}{dt} = v \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{n} v$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{r} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、描述点的运动的弧坐标法

3. 弧坐标中的加速度表示

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{r} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} = a_t \mathbf{r} + a_n \mathbf{n} = a_t + a_n$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad \text{——切向加速度}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \text{——法向加速度}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、描述点的运动的弧坐标法

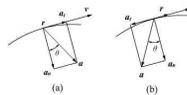
小结

- 切向加速度 $a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$ $\quad \mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{r} + v \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- 表示速度大小变化的速率; $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} \mathbf{n}$
- 法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$
- 表示速度方向变化的速率; $\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{r} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} = a_t \mathbf{r} + a_n \mathbf{n}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、描述点的运动的弧坐标法

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



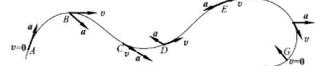
曲线匀速运动 $a_t = 0, v = v_0 = \text{常数}, s = s_0 + v_0 t$

曲线匀变速运动 $a_t = \text{常数}, v = v_0 + a_t t, s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

多选题 1分

点沿曲线运动, 图示各点给出的速度和加速度那些是可能的?



- A B C D E F G

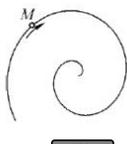
提交

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

多选题 1分

点M沿螺旋线自外向内运动, 走过的弧长与时间成正比, 问点的加速度是越来越大还是越来越小? 点越跑越快还是越跑越慢?

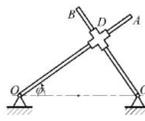
- A 速度越来越大
 B 速度越来越慢
 C 加速度越来越大
 D 加速度越来越小



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例5-5

图示机构中OA和O1B分别绕O和O1轴转动, 用十字滑块D将两杆连接, 运动过程中两杆保持垂直, 已知OO1 = a, $\varphi = kt$, 式中k为常数. 求滑块D的速度和相对于OA的速度.

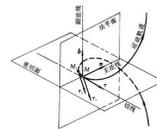


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、描述点的运动的弧坐标法

4. 自然轴系

当运动轨迹为空间曲线时, 弧坐标系中所得到的结论同样成立, 只需将弧坐标系扩展为自然轴系.



过M点与运动轨迹相切的平面称为密切面(osculating plane).

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四、描述点的运动的弧坐标法

4、自然轴系

P - 空间曲线上的动点;
 τ - 过动点 P 的密切面内的切线, 其正向指向弧坐标正向;
 N - 密切面内垂直于切线的直线, 其正向指向曲率中心;
 β - 过动点 P 垂直于切线和主法线的直线, 其正向由 $\beta = \tau \times N$ 确定。
 相互正交的二条轴线构成随时间变化的直角坐标系, 称为**自然轴系**。
 加速度在副法线方向的投影恒为零。
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例5-6

半径为 R 的圆盘沿直线轨道无滑动地滚动 (纯滚动), 设圆盘在铅垂面内运动, 且轮心 A 的速度为 $v_0(t)$ 。

- 分析圆盘边缘一点 M 的运动;
- 讨论当轮心的速度为常数时, 轮缘上各点的速度和加速度分布。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例5-6

解: 1. 建立坐标系 Oxy

取点 M 所在的一个最低位置为原点 O 。设在任意时刻圆盘的转过的角度为 $\angle CAM = \theta$, θ 为时间的函数, \angle 是圆盘与轨道的接触点, 由于圆盘作纯滚动, 所以:

$$x_A = OC = \widehat{CM} = R\theta$$

于是 M 点的运动方程为:

$$\begin{cases} x = OC - AM \sin \theta \\ y = AC - AM \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x = R\theta - R \sin \theta \\ y = R(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例5-6 M点的运动方程为:

$$\begin{cases} x = OC - AM \sin \theta \\ y = AC - AM \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x = R(\theta - \sin \theta) \\ y = R(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

点 M 的速度分量为:

$$\begin{cases} \dot{x} = R\dot{\theta}(1 - \cos \theta) \\ \dot{y} = R\dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

加速度分量为:

$$\begin{cases} \ddot{x} = R\ddot{\theta}(1 - \cos \theta) + R\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{y} = R\ddot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{cases}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解: 2. 建立 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\theta}$ 与圆盘中心 A 点的速度 $v_0(t)$ 之间的关系

圆盘沿直线轨道作纯滚动, 故轮心必作水平直线运动

$$x_A = OC = R\theta$$

将其对 t 求一次导数, 可得

$$\dot{x}_A = R\dot{\theta} = v_0$$

再对 t 求一次导数, 可得

$$\ddot{x}_A = R\ddot{\theta} = \dot{v}_0 = a_0$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解: 2. 建立 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\theta}$ 与圆盘中心 A 点的速度 $v_0(t)$ 之间的关系

$$\dot{x}_A = R\dot{\theta} = v_0 \quad \ddot{x}_A = R\ddot{\theta} = \dot{v}_0 = a_0$$

引入 $\omega = \dot{\theta} \quad \alpha = \ddot{\theta}$ 则有

$$\begin{cases} \omega = \frac{v_0}{R} \\ \alpha = \frac{a_0}{R} \end{cases}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解: 2. 建立 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\theta}$ 与圆盘中心 A 点的速度 $v_0(t)$ 之间的关系

M 点的速度大小为

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R|\dot{\theta}|\sqrt{2(1 - \cos \theta)} = 2v_0 \sin \frac{\theta}{2} = \omega MC$$

即轮上 M 点的速度大小与 M 点到 C 点 (轮上与地面接触点) 的距离成正比。其方向由下式确定:

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{i}) = \frac{v_x}{v} = \sin \frac{\theta}{2} \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{j}) = \frac{v_y}{v} = \cos \frac{\theta}{2}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R|\dot{\theta}|\sqrt{2(1 - \cos \theta)} = 2v_0 \sin \frac{\theta}{2} = \omega MC$$

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{i}) = \frac{v_x}{v} = \sin \frac{\theta}{2} \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{j}) = \frac{v_y}{v} = \cos \frac{\theta}{2}$$

从图中的几何关系可以证明: 任意点的速度矢量垂直于滚动时轮与地面接触点的连线, 即,

$$\mathbf{v} \perp MC$$

则纯滚动时轮上各点的速度如图所示。

当 $\theta = 0$ 或 $\theta = 2\pi$ 时, M 点与地面接触, 此时 M 点的速度为零。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

当 $\theta = 0$ 或 $\theta = 2\pi$ 时, M 点与地面接触, 此时 M 点的速度为零。加速度可由式

$$\begin{cases} \ddot{x} = R\ddot{\theta}(1 - \cos \theta) + R\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{y} = R\ddot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{cases}$$

求得

$$a = R\dot{\theta}^2 \mathbf{j}$$

由此可见, 当 M 点与地面接触时, 其加速度的大小不等于零, 方向垂直于地面向上。该加速度是轮在此瞬时时的切向加速度, 因为此时速度为零, 故其法向加速度为零。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

讨论:

若 v_0 为常矢量, 则 ω 为常量, 由式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R\dot{\theta}(1 - \cos\theta) + R\dot{\theta}^2 \sin\theta \\ \dot{y} &= R\dot{\theta} \sin\theta + R\dot{\theta}^2 \cos\theta \end{aligned}$$

M 点加速度大小恒为:

$$a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R\dot{\omega}^2$$

M 点加速度的方向由下式确定:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{i}) = \frac{\dot{x}}{a} = \sin\theta \quad \cos(\mathbf{a}, \mathbf{j}) = \frac{\dot{y}}{a} = \cos\theta$$

这时轮缘上 M 点的加速度方向均指向圆心 A, 如图所示。此时的加速度既非切向加速度, 也非法向加速度, 而是这两种加速度的矢量和。注意, 若 v_0 不为常矢量, 则加速度方向并不指向圆心。

$\omega = \frac{v_0}{R}$
 $\alpha = \frac{a_0}{R}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

描述点运动的三种方法比较

- 矢量法 - 结果简明, 具有概括性, 且与坐标选择无关。对于实际问题需将矢量及其导数表示成标量及其导数的形式。
- 直角坐标法 - 实际问题中, 一种广泛应用的方法。
- 弧坐标法 - 应用于运动轨迹已知的情形, 其最大特点是将速度矢量大小变化率和方向变化率区分开来, 使得数学表达式的含义更加清晰。

点的运动学应用的两类问题

- 第一类问题: 已知运动轨迹, 确定速度与加速度; 给定约束条件, 确定运动轨迹、速度、加速度。
- 第二类问题: 已知加速度以及运动的初始条件, 确定速度和运动轨迹——第一类问题的反运算。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§5-2 刚体简单运动

平动

定轴转动

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、平动

刚体运动时, 其上任意直线始终平行于其初始位置。这种运动称为刚体的平动 (translation), 简称平动或平动。在平动刚体内任选两点 A、B, 令点 A、B 的矢径分别为 r_{A0} 和 r_{B0} , 则两条矢径端点的轨迹就是这两点的轨迹。

$$r_A = r_B + r_{BA}$$

根据平动的定义, r_{BA} 为常矢量。

$$\frac{dr_{BA}}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{r}_A = \dot{r}_B$$

同一瞬时, 平动刚体上各点的轨迹相同, 速度相同, 各点的加速度也相同。因此刚体平动时, 可以用刚体上任一点 (例如圆心) 的运动表示刚体的运动。于是, 研究平动刚体的运动可归结为研究点的运动。

$v_A = v_B \Rightarrow a_A = a_B$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例题5-7

已知: $O_1A = O_2B = l$; O_1A 杆的角速度 ω 和角加速度 α 。

求: C 点的运动轨迹、速度和加速度

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例题5-7

已知: $O_1A = O_2B = l$; O_1A 杆的角速度 ω 和角加速度 α 。

解: 板运动过程中, 其上任意直线始终平行于它的初始位置。因此, 板作平动。

1. 运动轨迹

C 点的运动轨迹与 A、B 两点的运动轨迹形状相同, 即以 O 点为圆心 (l 为半径) 的圆弧。而不是以 O 点为圆心、或以 O 点为圆心的圆弧。

$$s = l\varphi$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例题5-7

已知: $O_1A = O_2B = l$; O_1A 杆的角速度 ω 和角加速度 α 。

解: 板作平动。

$$s = l\varphi$$

2. 速度

$$v_C = v_A = v_B = \omega l$$

3. 加速度

$$a_c = a_A = \sqrt{(a_t^2) + (a_n^2)}$$

$$= \sqrt{(\alpha l)^2 + (\omega^2 l)^2}$$

$$= l\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例题5-7

已知: $O_1A = O_2B = l$; O_1A 杆的角速度 ω 和角加速度 α 。

需要注意的是虽然平板上各点的运动轨迹均为圆, 但是平板并不作转动, 而是作平面曲线平动。由此, 在分析中需要注意刚体运动与刚体上点的运动的区别。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、定轴转动

刚体运动时, 若其上 (或其扩展部分) 一条直线始终保持不动, 其它各点均围绕该轴作圆周运动, 则称这种运动为定轴转动 (fixed-axis rotation)。这条固定的直线称为转轴, 轴线上各点的速度和加速度均恒为零。

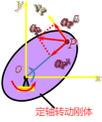
如果研究位于定系中的平面刚体绕垂直于纸面的轴 O (图上表示出的轴) 转动, 则以 OP 与定坐标轴 x 之间的夹角 φ 为坐标。于是, 转角 φ 随时间的变化描述了刚体的运动, 由此得到刚体定轴转动的运动方程为:

$$\varphi = f(t)$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、定轴转动

刚体的角速度与角加速度分别为



$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\varphi} \\ \alpha &= \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

转角（或角位移）、角速度与角加速度都是描述刚体整体运动的物理量。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、定轴转动

角速度 $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ 大小 $|\frac{d\varphi}{dt}|$ 方向：逆时针为正

角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

匀速转动 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t$

匀变速转动 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \text{cont} \quad \omega = \omega_0 + \alpha t$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、定轴转动

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \beta t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例5-8 汽车发动机曲轴的转速在2s内由每分钟200转匀增加到每分钟720转，求：(1) 角加速度；(2) 曲轴转过的圈数。

解：(1) $\omega_1 = 40\pi \text{ (rad/s)}$ $\omega_2 = 90\pi \text{ (rad/s)}$

曲轴做匀变速转动：

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{90\pi - 40\pi}{2} = \frac{25\pi}{2} \text{ (rad/s}^2\text{)} = 13.1 \text{ (rad/s}^2\text{)}$$

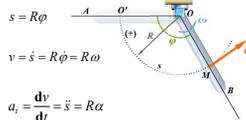
$$(2) \quad \varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\alpha} = 780\pi \text{ (rad)}$$

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = 390 \text{ (转)}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、定轴转动刚体内各点的速度和加速度

1. 点的运动方程



2. 速度

$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\omega$$

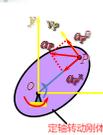
3. 加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{s} = R\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{R}(R\omega)^2 = R\omega^2$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、定轴转动刚体内各点的速度和加速度



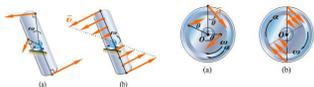
$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\varphi} \\ \alpha &= \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_P &= OP \quad v_P = \omega r_P \\ a_P &= \sqrt{(a_t^2) + (a_n^2)} = r_P \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \\ \tan \theta &= \frac{a_t}{a_n} = \frac{\alpha}{\omega^2} \end{aligned}$$

刚体定轴转动时，其上各点的速度和加速度与点到转轴的距离成正比。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

速度与加速度分布图



$$v = R\omega$$

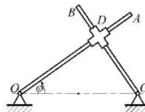
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\tan \theta = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例5-9

图示机构中OA和OB分别绕O和O₁轴转动，用十字滑块D将两杆连接。运动过程中两杆保持垂直。已知OO₁ = a, $\varphi = kt$, 式中k为常数。求B点的速度和加速度。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

- (1) 转动刚体上各点的速度、切向加速度、法向加速度、加速度的大小分别与其转动半径成正比。同一瞬时转动半径上各点的速度、加速度呈线性分布。
- (2) 转动刚体上各点的速度方向垂直于转动半径，其指向与角速度的转向一致。
- (3) 转动刚体上各点的切向加速度垂直于转动半径，其指向与角加速度的转向一致。
- (4) 转动刚体上各点的法向加速度方向，沿半径指向转轴。
- (5) 任一瞬时转动刚体上各点的加速度与转动半径的夹角相同。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

轮系的传动比

A、齿轮传动

① 啮合条件

$$R_1\omega_1 = v_A = v_B = R_2\omega_2$$

② 传动比

$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{R_2}{R_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

B、带传动

$$r_1\omega_1 = v_A = v_B = v_{A'} = v_{B'} = r_2\omega_2$$

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、定轴转动 用矢量表示角速度与角加速度

1、角速度矢量和角加速度矢量

角速度矢量

- 大小 $|\omega| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|$
- 作用线 沿轴线 滑动矢量
- 指向 右手螺旋规则
- $\omega = \omega \vec{k}$

角加速度矢量

- $\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{k} = \alpha \vec{k}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、定轴转动 用矢量表示角速度与角加速度

考察三维定轴转动刚体

角速度矢量、角加速度矢量

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k} = \omega \vec{k}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{k} = \alpha \vec{k}$$

若刚体加速转动，则 α 与 ω 同向。
若减速转动，则 α 与 ω 反向。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

2、绕定轴转动刚体上点的速度和加速度

速度 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ [大小 $|\vec{v}| = |\omega| |\sin\theta| r = |\omega| r \sin\theta$]
方向 右手法则

加速度 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ M点切向加速度
 $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ M点法向加速度

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、定轴转动 用矢量表示角速度与角加速度

考察三维定轴转动刚体

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_P + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_P}{dt}$$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{r}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_P)$$

$$= \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}_P \quad \vec{a}_n = \omega^2 \vec{r}_P$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

作业：5-8 5-15

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第2篇 运动学

第6章 点的合成运动

相对某一参考体的运动可由相对于其他参考体的几个运动的组合而成——合成运动。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第6章 点的合成运动

由于运动的相对性，在不同的参考系中，对于同一动点，其运动方程、速度和加速度是不相同的。许多力学问题中，常常需要研究一点在不同参考系中的运动量（速度和加速度）的相互关系。

本章将用定、动两种参考系，描述同一动点的运动；分析两种结果之间的相互关系，建立点的速度合成定理和加速度合成定理。

点的运动复合是运动分析方法的重要内容，在工程运动分析中有着广泛的应用。同时可为相对运动动力学提供运动分析的理论基础，点的运动复合的分析方法还可推广应用于分析刚体的复合运动。本章是运动学的重点内容。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第6章 点的合成运动

- 点的合成运动基本概念
- 点的速度合成定理
- 牵连运动为平动时点的加速度合成定理
- 牵连运动为转动时点的加速度合成定理

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§6-1 点的合成运动基本概念

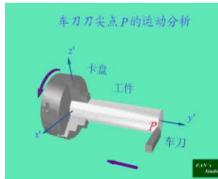
一、两种参考系

一般工程问题中，通常将固连在地球或相对地球不动的架上的坐标系，称为**定参考系**（fixed reference system），简称**定系**，以坐标系 $Oxyz$ 表示；固定在其它相对于地球运动的参考体上的坐标系称为**动参考系**（moving reference system），简称**动系**，以坐标系 $O'x'y'z'$ 表示。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§6-1 点的合成运动基本概念

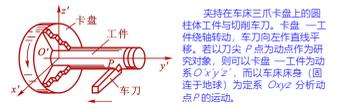
一、两种参考系



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§6-1 点的合成运动基本概念

一、两种参考系



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§6-1 点的合成运动基本概念

二、三种运动与三种速度和加速度



动点（研究对象）相对于定系的运动，称为动点的**绝对运动**（absolute motion）。动点刀尖 P 点的绝对运动为水平直线（绝对轨迹）运动。

动点相对于动系的运动速度和加速度，分别称为动点的**相对速度**（relative velocity）和**相对加速度**（relative acceleration），分别用符号 v_r 和 a_r 表示。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§6-1 点的合成运动基本概念

二、三种运动与三种速度和加速度



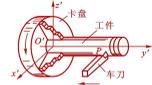
动点相对于动系的运动，称为动点的**相对运动**（relative motion）。动点刀尖上 P 点的相对运动是在工件圆柱面上的螺旋线（相对轨迹）运动。

动点相对于定系的运动速度和加速度，分别称为动点的**绝对速度**（absolute velocity）和**绝对加速度**（absolute acceleration），分别用符号 v_a 和 a_a 表示。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§6-1 点的合成运动基本概念

二、三种运动与三种速度和加速度

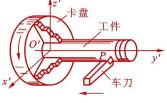


动系相对于定系的运动，称为**牵连运动**（convected motion）。图中，牵连运动为绕 y' 轴的定轴转动。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§6-1 点的合成运动基本概念

二、三种运动与三种速度和加速度



动系上每一瞬时与动点相重合的那一点，称为瞬时**重合点**，又称为**牵连点**。由于动点相对于动系是运动的，因此，在不同的瞬时，牵连点是动系上的不同点。

动系上牵连点相对定系的运动速度和加速度，分别称为为动点的**牵连速度** (convected velocity) 和**牵连加速度** (convected acceleration)，分别用符号 v_e 和 a_e 表示。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§6-1 点的合成运动基本概念

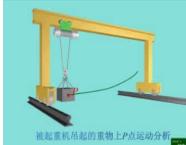
二、三种运动与三种速度和加速度

1. 动点的绝对运动和相对运动都是指点的运动，它可能作直线运动或曲线运动；而牵连运动则是指导系的运动，实际上也就是与之相连的参考体 - 刚体的运动，牵连运动可能是平移，转动或其它较复杂的运动。
2. 牵连速度 (加速度) 是指牵连点的 (绝对) 速度 (加速度)，而牵连运动是指动参考体 - 刚体的运动。这在概念上是不同的，二者的联系是牵连点是动参考体上与动点的瞬时重合点。
3. 分析这三种运动时，必须明确以哪一物体作为参考系。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§6-1 点的合成运动基本概念

二、三种运动与三种速度和加速度



起重机吊起的重物上P点的运动分析

牵连运动?
定参考系?
动参考系?
绝对运动?
相对运动?
牵连运动?

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

填空题 5分

动点 [填空 1]，动系 [填空 2]
绝对运动为 [填空 3]；
相对运动为 [填空 4]；
牵连运动为 [填空 5]；



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§6-1 点的合成运动基本概念

二、三种运动与三种速度和加速度



飞机顺流而上时的运动分析

定参考系?
动参考系?
绝对运动?
相对运动?
牵连运动?

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

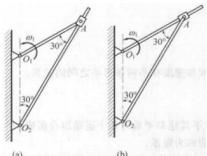
填空题 5分

动点 [填空 1]，动系 [填空 2]
绝对运动为 [填空 3]；
相对运动为 [填空 4]；
牵连运动为 [填空 5]；



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

课堂练习 选择动点动系，确定三种运动。



(a) (b)

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§6-2 点的速度合成定理

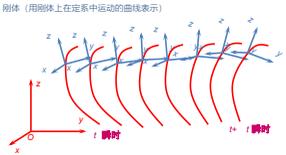
- 动系与定系
- 三种运动轨迹
- 速度合成定理
- 关于速度合成定理的讨论

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§6-2 点的速度合成定理

一、动系与定系

刚体 (用刚体上在定系中运动的曲线表示)



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§6-2 点的速度合成定理

二、三种运动轨迹

刚体在定系中运动，动系固结在刚体上。

动点P沿着刚体上的曲线运动。 P₁点 - 动系上与动点重合的点。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、速度合成定理

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta R'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta R_1}{\Delta t} \Rightarrow v_a = v_r + v_c$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、速度合成定理

$$V_a = V_r + V_c$$

绝对速度 = 牵连速度 + 相对速度

速度合成定理 (theorem for composition of velocities), 即动点的绝对速度等于其牵连速度与相对速度的矢量和。

由于没有对绝对运动和相对运动轨迹形状作任何限制, 也没有对牵连运动为何种刚体运动作限制, 因此本定理对各种运动都是适用的。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、速度合成定理

牵连运动与牵连速度 - 牵连运动是刚体(动系)的运动; 牵连速度是刚体上一点(与动点相重合的点的速度)。

速度合成定理为平面矢量式, 由此可以写出两个分量式, 用于求解两个未知量。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-1

铰接四边形 $O_1A = O_2B = 100\text{mm}$, $O_1O_2 = AB$, 杆 O_1A 以等角速度 $\omega = 2\text{rad/s}$ 绕轴 O_1 转动, AB 杆上有一套筒 C , 此套筒与杆 CD 相铰接, 机构的各部件都在同一铅垂平面内。

试求当 $\varphi = 60^\circ$ 时, CD 杆的速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

铰接四边形 $O_1A = O_2B = 100\text{mm}$, $O_1O_2 = AB$, 杆 O_1A 以等角速度 $\omega = 2\text{rad/s}$ 绕轴 O_1 转动, AB 杆上有一套筒 C , 此套筒与杆 CD 相铰接, 机构的各部件都在同一铅垂平面内。

试求当 $\varphi = 60^\circ$ 时, CD 杆的速度。

解: 1. 运动分析
 动点: CD 上的 C 点;
 动系: 固连于 AB 杆;
 绝对运动: 上下直线运动;
 相对运动: 沿 AB 曲线运动;
 牵连运动: 铅垂平面内曲线平移。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

铰接四边形 $O_1A = O_2B = 100\text{mm}$, $O_1O_2 = AB$, 杆 O_1A 以等角速度 $\omega = 2\text{rad/s}$ 绕轴 O_1 转动, AB 杆上有一套筒 C , 此套筒与杆 CD 相铰接, 机构的各部件都在同一铅垂平面内。

试求当 $\varphi = 60^\circ$ 时, CD 杆的速度。

解: 2. 速度分析

$$v_a = v_c + v_r$$

$$v_c = v_a = O_1A \times \omega = 0.2\text{m/s}$$

$$v_r \perp O_1A$$

v_r 方向沿 BA ; v_c 方向铅垂向上。式中只有 v_r 、 v_c 两者大小未知, 由平行四边形法则求得:

$$v_{CD} = v_c = v_c \cos \varphi = 0.1\text{m/s}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、速度合成定理

解: 3. 讨论
 如果 v_r 的方向假设与图示方向相反, 则无法用平行四边形法则确定 v_c 。这时, 需向与未知矢量 v_r 垂直方向投影, 以确定 v_c 。这种方法称为矢量投影法。

采用矢量投影法求解速度合成定理的矢量方程, 是最一般的方法, 这时速度的方向即使假设错了, 也能得到正确的解答。

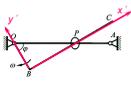
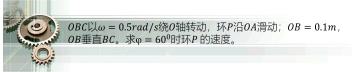
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-2

直角弯杆 OBC 以角速度 $\omega = 0.5\text{rad/s}$ 绕 O 轴转动, 使套在其上的小环 P 沿固定直杆 OA 滑动; $OB = 0.1\text{m}$, OB 垂直 BC 。

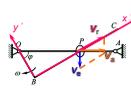
求: 当 $\varphi = 60^\circ$ 时小环 P 的速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



解: 1. 运动分析
 动点: 小环 P;
 动系: 固连于 OBC;
 绝对运动: 沿 OA 固定直线;
 相对运动: 沿 BC 杆直线;
 牵连运动: 绕 O 定轴转动。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



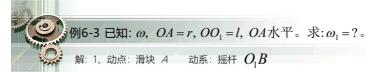
解: 2. 速度分析

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$
 其中 v_e, v_r, v_a 方向如图;
 $v_r = \overline{OP} \cdot \omega = 0.2 \times 0.5 = 0.1 \text{ m/s}$;
 式中只有 v_e, v_a 二者大小未知, 从而由速度平行四边形解得小环 P 的速度

$$v_a = \sqrt{3} v_r = 0.173 \text{ m/s}$$

 此外, 还可求得 $v_e = 2 \text{ m/s}, v_r = 0.2 \text{ m/s}$

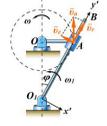
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



解: 1. 动点: 滑块 A 动系: 摇杆 O_1B
 2. 运动分析: 绝对运动 - 绕 O 点的圆周运动; 相对运动 - 沿 O_1B 的直线运动; 牵连运动 - 绕 O_1 轴定轴转动。
 3. 速度分析: $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$
 大小: $r\omega$? ?
 方向: $\sqrt{\quad} \sqrt{\quad} \sqrt{\quad}$

$$v_e = v_a \sin \varphi = \omega r \sin \varphi$$

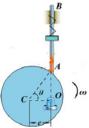
$$\omega_1 = \frac{v_e}{O_1A} = \frac{r^2 \omega}{l^2 + r^2}$$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

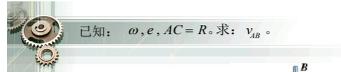


例6-4 如图所示半径为R、偏心距为e的凸轮, 以角速度ω绕O轴转动, 杆AB能在滑槽中上下平移, 杆的端点A始终与凸轮接触, 且OAB成一直线。

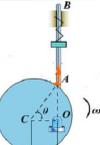


求图示位置时, 杆AB的速度。

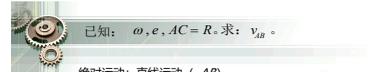
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



解: 1. 动点: AB 杆上A
 动系: 凸轮
 2. 绝对运动: 直线运动 (AB)
 相对运动: 圆周运动 (半径 R)
 牵连运动: 定轴运动 (轴 O)

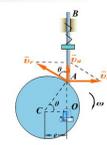


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



绝对运动: 直线运动 (AB)
 相对运动: 圆周运动 (半径 R)
 牵连运动: 定轴运动 (轴 O)
 3. 速度分析: $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$
 大小: ? $\omega \cdot OA$?
 方向: $\sqrt{\quad} \sqrt{\quad} \sqrt{\quad}$

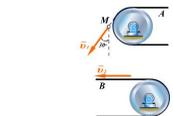
$$v_a = v_e \cot \theta = \omega \cdot OA \frac{e}{OA} = \omega e$$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

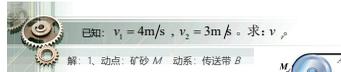


例6-5 矿砂从传送带 A 落入到另一传送带 B 上, 如图所示。站在地面上观察矿砂下落的速度 $v_1 = 4 \text{ m/s}$, 方向与铅直线成 30° 角。已知传送带 B 水平传动速度 $v_2 = 3 \text{ m/s}$



求: 矿砂相对于传送带 B 的速度。

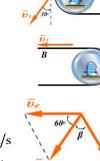
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



解: 1. 动点: 矿砂 M 动系: 传送带 B
 2. 绝对运动: 直线运动 (\vec{v}_1)
 牵连运动: 平移 (\vec{v}_2)
 相对运动: 未知
 3. 速度分析: $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$
 大小: $\sqrt{\quad} \sqrt{\quad} ?$
 方向: $\sqrt{\quad} \sqrt{\quad} ?$

$$v_a = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos 60^\circ} = 3.6 \text{ m/s}$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{v_2}{v_a} \sin 60^\circ\right) = 46^\circ 12'$$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例6-6 圆盘半径为R, 以角速度ω₁绕水平轴CD转动, 支承CD的框架又以角速度ω₂绕铅直的AB轴转动, 如图所示。圆盘垂直于CD, 圆心在CD与AB的交点O处。

求: 当连线OM在水平位置时, 圆盘边缘上的点M的绝对速度。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

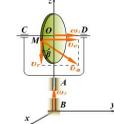
已知: $R, \omega_1, \omega_2, OM$ 水平。求: v_M

解: 1. 动点: M 点 动系: 框架 BCD

2. 绝对运动: 未知
 相对运动: 圆周运动 (圆心 O 点)
 牵连运动: 定轴转动 (AB 轴)

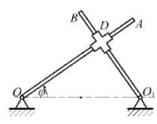
3. $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$
 大小 ? $R\omega_2$ $R\omega_1$
 方向 ? \checkmark \checkmark

$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = R\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$
 $\beta = \arctan\left(\frac{v_r}{v_e}\right) = \arctan\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

课堂练习: 图示机构中 OA 和 O_1B 分别绕 O 和 O_1 轴转动, 用十字滑块 D 将两杆连接。运动过程中两杆保持垂直。已知 $OO_1 = a, \varphi = kt$, 式中 k 为常数。求滑块 D 的速度和 O_1B 的角速度。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

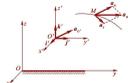
§6-3 加速度合成定理

一、牵连运动为平动时点的加速度合成定理

点的合成运动中, 加速度之间的关系比较复杂。因此, 我们由简单到复杂, 先分析动系作平移的情形。即先研究牵连运动为平动时的加速度合成定理, 然后再介绍牵连运动为转动时的加速度合成定理。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、牵连运动为平动时点的加速度合成定理



设 $O'x'y'z'$ 为平移参考系, 由于 x', y', z' 各轴方向不变, 可与定坐标轴 x, y, z 分别平行。

如果动点 M 相对于动系的相对坐标为 x', y', z' , 由于 i', j', k' 为平移动坐标轴的单位常矢量, 则点 M 的相对速度和相对加速度为

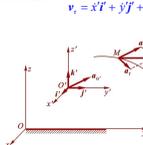
$v_r = x'i' + y'j' + z'k'$ $a_r = \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k'$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、牵连运动为平动时点的加速度合成定理

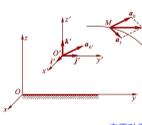
$v_a = \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k'$ $a_a = \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + \ddot{z}'k'$

利用点的速度合成定理
 $v_a = v_e + v_r$
 牵连运动为平移
 $v_e = v_{O'}$
 $v_a = v_{O'} + \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k'$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、牵连运动为平动时点的加速度合成定理



$v_a = v_{O'} + \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k'$

两边对时间求导, 动系平移, 故 x', y', z' 为常矢量, 得

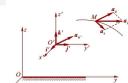
$a_a = \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + \ddot{z}'k'$

由于动系平移, 故 $a_{O'} = a_e$

$a_a = \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + \ddot{z}'k'$ $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、牵连运动为平动时点的加速度合成定理



$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$

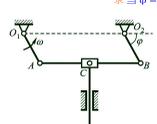
牵连运动为平移时点的加速度合成定理: 当牵连运动为平移时, 动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时它的牵连加速度与相对加速度的矢量和。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-7

铰接四边形 $O_1A = O_2B = 100\text{mm}$, $O_1O_2 = AB$, 杆 O_1A 以等角速度 $\omega = 2\text{rad/s}$ 绕轴 O_1 转动, AB 杆上有一套筒 C , 此套筒与杆 CD 相铰接, 机构的各部件都在同一铅垂平面内。

* 当 $\varphi = 60^\circ$ 时, CD 杆的加速度。



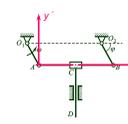
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

铰接四边形 $O_1A = O_2B = 100\text{mm}$, $O_1O_2 = AB$, 杆 O_1A 以等角速度 $\omega = 2\text{rad/s}$ 绕轴 O_1 转动, AB 杆上有一套筒 C , 此套筒与杆 CD 相铰接, 机构的各部件都在同一铅垂平面内。

* 当 $\varphi = 60^\circ$ 时, CD 杆的加速度。

解: 1. 运动分析
 动点: CD 上的 C 点。
 动系: 固连于 AB 杆。

绝对运动: 上下直线运动;
 相对运动: 沿 AB 曲线运动;
 牵连运动: 铅垂平面内曲线平移。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

等速转动杆 $O_1A = O_2B = 100\text{mm}$, $O_1O_2 = AB$, 杆 O_1A 以等角速度 $\omega = 6\text{rad/s}$ 绕轴 O_1 转动, A 杆上套有一套筒 C , 此套筒与杆 CD 相连接, 机构的各部件都在同一铅垂平面内。

求当 $\varphi = 60^\circ$ 时, CD 杆的加速度。

解: 2. 加速度分析:

$a_a = a_e + a_r$

其中由于动系作平移, 故动系 A 杆上各点的加速度相同, 因此动系 A 杆上与动点套筒 C 相重合点 C_1 (图中未示出) 的加速度即牵连加速度:

$a_e = a_{C_1}, a_{C_1} = O_1A\omega^2 = 0.4\text{m/s}^2$

由平行四边形法则, 得

$a_{CD} = a_e \sin \varphi = 0.346\text{m/s}^2$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

图示以等角速度 ω 绕轴 O 转动的圆盘, 半径为 R , 在靠近边缘的上方, 静止地悬挂一个小球 P 。

若以 P 为动点, 圆盘为动系, 验证牵连运动为平移时所得到的加速度合成定理。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

P 点的运动分析

绝对运动: 静止, 故绝对加速度 $a_a = 0$

牵连运动: 绕 O 轴作定轴转动;

相对运动: 以点 O 为圆心, R 为半径, 与盘上重合点反方向的等速圆周运动。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

动点的绝对加速度 $a_a = 0$

牵连加速度的大小 $a_e = R\omega^2$

方向指向圆盘中心 O

相对加速度的大小 $a_r = R\omega^2$

方向也指向圆盘中心 O

牵连加速度与相对加速度的矢量和

$a_e + a_r = R\omega^2 n + R\omega^2 n = 2R\omega^2 n \neq a_a = 0$

牵连运动为平移时的加速度合成定理, 对于牵连运动为转动的情形不再成立。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

不正确的分析思路所得到的不正确的结论

将速度合成定理等号两侧分别对时间 t 求一次绝对导数

$v_a = v_e + v_r \rightarrow \frac{dv_a}{dt} = \frac{dv_e}{dt} + \frac{dv_r}{dt}$

当牵连运动为转动时

$a_a = a_e + a_r$

$\frac{dv_a}{dt} = a_e, \frac{dv_e}{dt} = a_e, \frac{dv_r}{dt} = a_r$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

圆盘以匀角速度 ω_1 绕垂直于盘面的固定中心轴 O 转动, 小球 M 在圆盘上半径为 r 的圆槽内按 ω_2 转向以速率 v_2 相对于圆盘运动。现考察小球 M 的加速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

动点为小球 M , 动系固结于圆盘, 相对运动为匀速率圆周运动, 相对速度为 v_r , 相对加速度

$a_r = a_r^n = \frac{v_r^2}{r}$

方向指向圆心 O 。

牵连运动是圆盘以匀角速度 ω_1 绕 O 轴转动, 动点 M 的牵连速度大小为 $v_e = \omega_1 r$, 方向与 v_r 一致, 牵连加速度

$a_e = a_e^n = r\omega_1^2$

方向也指向圆心 O 。

点 M 的绝对速度

$v_a = v_e + v_r = \omega_1 r + v_r =$ 常数

动点 M 的绝对运动是匀速率圆周运动。

M 的绝对加速度 a_a 的大小为

$a_a = a_a^n = \frac{v_a^2}{r} = \frac{(\omega_1 r + v_r)^2}{r} = a_e^2 r + \frac{v_r^2}{r} + 2\omega_1 v_r$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

当动系为定轴转动时, 动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时的牵连加速度、相对加速度与科氏加速度的矢量和。

$a_a = a_e + a_r + a_C$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

加速度合成定理分析过程

$\frac{dv_a}{dt} = a_e + \omega \times v_r, \frac{dv_r}{dt} = a_r + \omega \times v_r$

$\frac{dv_a}{dt} = \frac{dv_e}{dt} + \frac{dv_r}{dt}$

$a_a = a_e + a_r + 2\omega \times v_r$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

牵连运动为转动时加速度合成定理的证明

设动系 $O'x'y'z'$ 以角速度 ω 绕定轴 Ox ($Oxyz$ 为定系) 转动, 角加速度为 $\dot{\omega}$. 动点 P 的相对矢径、相对速度和相对加速度可以表示为:

$$\begin{aligned} r' &= x'i' + y'j' + z'k' \\ v_r &= \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k' \\ a_r &= \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + \ddot{z}'k' \end{aligned}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

牵连运动为转动时加速度合成定理的证明

$r' = x'i' + y'j' + z'k'$
 $v_r = \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k'$
 $a_r = \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + \ddot{z}'k'$

设动点 P 瞬时重合点为 P_1 , 由定义式

$$v = \omega \times r$$

点 P 的牵连速度, 即瞬时重合点 P_1 的速度为

$$v_e = v_{P_1} = \omega \times r$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

牵连运动为转动时加速度合成定理的证明

则动点 P 的牵连速度, 即瞬时重合点 P_1 的速度为

$$v_e = v_{P_1} = \omega \times r$$

加速度矢量与角速度矢量和角加速度矢量之间的关系式

$$a_e = a \times r_p + \omega \times v_p$$

则动点 P 的牵连加速度, 即瞬时重合点 P_1 的加速度为

$$a_e = a_{P_1} = a \times r + \omega \times v_e$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

牵连运动为转动时加速度合成定理的证明

$v_r = \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k'$
 $v_e = v_{P_1} = \omega \times r$

应用速度合成定理, 有

$$v = v_r + v_e = \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k' + \omega \times r$$

将其对时间 t 求一次导数, 得到

$$a = \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + \ddot{z}'k' + \dot{\omega} \times r + \omega \times v_r$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

牵连运动为转动时加速度合成定理的证明

$a_e = \dot{v}_e = \dot{\omega} \times r + \omega \times v_e = \dot{\omega} \times (x'i' + y'j' + z'k') + \omega \times (\dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k')$

$a = a_e + a_r = \dot{\omega} \times r + \omega \times v_e + \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + \ddot{z}'k'$

利用后验公式

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r} \quad \frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r} \quad \frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r}$$

上式中

$$\dot{\omega} \times (x'i' + y'j' + z'k') = \dot{\omega} \times r + \omega \times v_e$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

牵连运动为转动时加速度合成定理的证明

$\dot{\omega}$ 对时间的导数:

$$\dot{\omega} = \frac{d\dot{\omega}}{dt} = \dot{\omega}_e \times \dot{\omega}$$

$\dot{r} = \dot{r}_e + \dot{r}'$

$\frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}_e}{dt} + \frac{d\dot{r}'}{dt} = \dot{\omega}_e \times (\dot{r}_e + \dot{r}') + \dot{\omega}' \times \dot{r}'$

因为 $\dot{v}_e = \frac{d\dot{r}_e}{dt} = \dot{\omega}_e \times \dot{r}_e$

得 $\frac{d\dot{r}'}{dt} = \dot{\omega}' \times \dot{r}'$, 同理可得 \dot{i}', \dot{j}' , 即

$$\dot{i}' = \dot{\omega}_e \times i', \dot{j}' = \dot{\omega}_e \times j', \dot{k}' = \dot{\omega}_e \times k'$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

牵连运动为转动时加速度合成定理的证明

$a_e = \dot{v}_e = \dot{\omega} \times r + \omega \times v_e = \dot{\omega} \times (x'i' + y'j' + z'k') + \omega \times (\dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k')$

$a = a_e + a_r = \dot{\omega} \times r + \omega \times v_e + \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + \ddot{z}'k'$

$\dot{\omega} \times (x'i' + y'j' + z'k') = \dot{\omega} \times r + \omega \times v_e$

$a = \dot{\omega} \times r + \omega \times v_e + \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + \ddot{z}'k'$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

科氏加速度

$a_c = \dot{\omega} \times r + \omega \times v_e + a_r + 2\omega \times v_r$

$a_c = a_e + a_r + a_c$

$a_c = 2\omega \times v_r$

a_c 称为科氏加速度 (Coriolis acceleration)。

科氏加速度由右手法则判定方向

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、牵连运动为转动时的加速度合成定理

牵连运动为转动时加速度合成定理的证明

当动系为定轴转动时, 动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时的牵连加速度、相对加速度与科氏加速度的矢量和。

$$a_a = a_e + a_r + a_c$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二 牵连运动为转动时的加速度合成定理

牵连运动为转动的加速度合成定理

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

可以证明, 当牵连运动为任意运动时, 上式都成立. 是点的加速度合成定理的普遍形式. 当牵连运动为平移时, $\omega_e = 0, a_e = 0$.

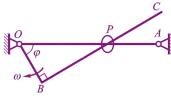
$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-8

直角弯杆 OBC 以匀角速度 $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ 绕 O 轴转动. 套在其上的小环 P 沿固定直杆 OA 滑动. $B = 0.1 \text{ m}$. OB 垂直 BC .

试求: 当 $\varphi = 60^\circ$ 时小环 P 的加速度.

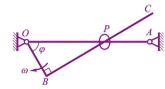


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-8 已知: $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$; $OB = 0.1 \text{ m}$. 试求: 当 $\varphi = 60^\circ$ 时小环 P 的加速度.

解:

- 动点: 小环 P ;
- 动系: 固连于 OBC ;
- 绝对运动: 沿 OA 固定直线;
- 相对运动: 沿 BC 杆直线;
- 牵连运动: 绕 O 定轴转动.



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-8

解: 例2中求得小环的相对速度为

$$v_r = 0.2 \text{ m/s}$$

2. 加速度分析:

- 绝对加速度为 a_a , 方向假设向右;
- 相对加速度为 a_r , 假设方向指向 A 点;
- 牵连加速度为 a_e , 方向沿转轴 O ;
- 科氏加速度为 a_c , 方向垂直于 v_r .

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-8

2. 加速度分析:

$$a_e^* = OP \cdot \omega^2 = 0.2 \text{ m} \times (0.5 \text{ rad/s})^2 = 0.05 \text{ m/s}^2$$

$$v_r = 0.2 \text{ m/s}$$

$$a_c = 2\omega v_r = 2 \times 0.5 \times 0.2 = 0.2 \text{ m/s}^2$$

应用加速度合成定理

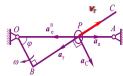
$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c$$

各项向量 a_c 方向上投影, 得到

$$0.5 a_a = -0.5 a_e^* + a_c$$

$$a_a = 0.35 \text{ m/s}^2$$

方向与假设一致



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-8

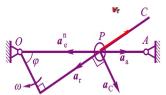
讨论:

本例的加速度分析中, a_e 和 a_c 的方向是假设的;

a_e 和 a_c 的方向不能假设: a_e 是根据牵连运动为等速转动确定; a_c 则是根据科氏加速度的定义

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

右手螺旋定则确定, 即: 四指指向与向量 $\boldsymbol{\omega}$ 方向一致, 握拳四指指向与向量 \mathbf{v}_r 方向一致, 则拇指指向即为 \mathbf{a}_c 的正方向.



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c$

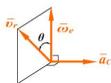
点的加速度合成定理: 动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时它的牵连加速度、相对加速度与科氏加速度的矢量和.

其中科氏加速度 $\bar{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$,

$$\text{大小: } a_c = 2\omega v_r \sin \theta$$

方向垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 和 \mathbf{v}_r ,

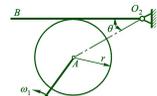
指向按右手法则确定



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-9

图示机构, O_1A 杆以匀角速度 ω_1 转动. 轮 A 半径为 r , 与 O_2B 在 A 点接触. $O_1A = 2r$, O_2B 始终与轮 A 接触. 图示瞬时, $\varphi = 60^\circ$, $\theta = 30^\circ$.



求: 图示瞬时 O_2B 的角速度 ω_2 . 角加速度 α_2 .

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-9 已知 $\omega_1, r, O_1A = 2r, \varphi = 60^\circ, \theta = 30^\circ$. 求 O_2B 的 ω_2, α_2 .

解: 1. 运动分析

- 动点: 杆 O_2B 上 A 点;
- 动系: 固连于 O_1A 杆;
- 绝对运动: 以 O_2 为圆心的圆周运动;
- 相对运动: 与 O_1A 平行的直线运动;
- 牵连运动: 绕 O_1 轴定轴转动.

2. 速度分析

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

其中, \mathbf{v}_e 垂直于 O_1A , $v_e = 2r\omega_1$

\mathbf{v}_r 垂直于 O_2A , 大小未知; \mathbf{v}_e 平行于 O_2B , 大小未知.

$$\text{解得 } v_e = v_r = \frac{\sqrt{3}}{3} v_A = \frac{2\sqrt{3}}{3} r\omega_1, \quad \omega_2 = \frac{v_e}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{3} \omega_1$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-9 已知 $\omega_1, r, O_1A=2r, \varphi=60^\circ, \theta=30^\circ$, 求 O_2B 的 ω_2, α_2 .

3. 加速度分析 $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_c$

绝对运动: 以 O_1 为圆心的等速圆周运动, 所以只有法向绝对加速度 a_c^n , 方向指向 O_1 ;

相对运动: 与 O_1O_2 平行的直线运动; 相对加速度为 a_c^r , 假设方向向左;

牵连运动: 绕 O_2 轴转动, 并非等速转动, 所以法向牵连加速度为 a_c^n , 方向指向转轴 O_2 ; 切向牵连加速度为 a_c^t , 其指向可以假设。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-9 已知 $\omega_1, r, O_1A=2r, \varphi=60^\circ, \theta=30^\circ$, 求 O_2B 的 ω_2, α_2 .

$\vec{a}_c = \vec{a}_c^n + \vec{a}_c^t + \vec{a}_c^r + \vec{a}_c$

a_c^n : 沿 AO_1 方向, 其值为 $a_c^n = 2r\omega_1^2$

a_c^t : 沿 AO_2 方向, 其值为 $a_c^t = AO_2 \cdot \omega_2^2 = 2r \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_2\right)^2 = \frac{2}{3}r\omega_2^2$

a_c^r : 垂直于 AO_2 方向, 大小未知; a_c^r : 平行于 O_1O_2 方向, 大小未知;

a_c : 垂直于 a_c^r , 其值为 $a_c = 2\omega_2 v_c = \frac{4}{3}r\omega_2^2$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-9 已知 $\omega_1, r, O_1A=2r, \varphi=60^\circ, \theta=30^\circ$, 求 O_2B 的 ω_2, α_2 .

$\vec{a}_c = \vec{a}_c^n + \vec{a}_c^t + \vec{a}_c^r + \vec{a}_c$

$a_c^n = 2r\omega_1^2$

$a_c^t = AO_2 \cdot \omega_2^2 = 2r \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_2\right)^2 = \frac{2}{3}r\omega_2^2$

$a_c = 2\omega_2 v_c = \frac{4}{3}r\omega_2^2$

将加速度合成定理矢量方程等号两边各项向矢量 a_c 方向上投影, 得到

$-a_c^n \cos 30^\circ = a_c^t \cos 60^\circ - a_c^r \cos 30^\circ + a_c$

$a_c^r = \frac{10\sqrt{3} + 18}{9} r\omega_1^2$ $\alpha_2 = \frac{a_c^t}{2r} = \frac{5\sqrt{3} + 9}{9} \omega_1^2$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

讨论

本题选 A 为动点后, O_1A 杆和轮 A 均不能选作动系, 所以选 O_2 杆为动系。此时因轮 A 与 O_2B 保持接触, 即 A 点运动过程中与动系上 O_2B 直线保持距离为 r , 故 A 点相对直线 O_2B (动系) 作平直运动, 使 v_c, a_c 方向已知, 便于求解。

为什么不可以选轮 A 与 O_2 杆接触点为动点呢? 轮 A 与 O_2 杆接触点是变化的, 二者相对轨迹不明确。

另一难点是确定动点 A 与动系 (固连于 O_2 后为无限大坐标平面) 的重合点, 从而确定 v_c, a_c^r, a_c^t 方向, a_c^r 的指向如果一时不能确定, 可以假设, 如果计算结果为正, 说明假设方向正确, 如果计算结果为负, 说明实际方向与假设方向相反。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-10 已知: $\omega_0, OA=r$
求: AB 与铅垂线夹角为 30° 时, 摇杆 AB 的角加速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-10 已知: $\omega_0, OA=r$
求: AB 与铅垂线夹角为 30° 时, 摇杆 AB 的角加速度。

解: 1. 运动分析

动点: 滑块 A

动系: x, y 固结于 O_1B

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-10 已知: $\omega_0, OA=r$
求: AB 与铅垂线夹角为 30° 时, 摇杆 AB 的角加速度。

解: 2. 速度分析

绝对速度 v_A : 沿铅垂方向向上; $v_A = \omega_0 r$

相对速度 v_r : 大小未知, 沿 O_1B 方向向上;

牵连速度 v_e : 大小未知, 方向垂直于 O_1A , 斜向左上方。

$v_e = v_A \cos 60^\circ = \frac{1}{2} r\omega_0$, $v_r = v_A \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega_0$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-10 已知: $\omega_0, OA=r$
求: AB 与铅垂线夹角为 30° 时, 摇杆 AB 的角加速度。

解: 3. 加速度分析

$\vec{a}_c = \vec{a}_c^n + \vec{a}_c^t + \vec{a}_c^r + \vec{a}_c$

$a_c^n = r\omega_0^2$ 沿着 OA , 指向 O_1 ;

a_c^t : 大小未知, 沿着 O_1B , 指向 B ;

$a_c^r = \frac{1}{8} r\omega_0^2$ 沿着 O_1A , 指向 O_1 ;

$a_c^t = |O_1A|\alpha$ O_1B 角加速度未知

垂直于 O_1A , 指向未知, 假设指向左上;

a_c : 垂直于 O_1B , 指向左上

$a_c = 2\omega_0 v_r = 2 \times \frac{v_r}{O_1A} \times \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega_0^2$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6-10 已知: $\omega_0, OA=r$
求: AB 与铅垂线夹角为 30° 时, 摇杆 AB 的角加速度。

将所有加速度矢量向 a_c^t 方向上投影:

$a_c^n \cos 30^\circ = a_c^t + a_c$

$r\omega_0^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2r\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega_0^2$

$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{8} \omega_0^2$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

6-11 课堂练习

凸轮偏心距 $OC = e$ ，半径 $r = \sqrt{3}e$ ，以等角速度 ω 绕 O 轴转动，图示瞬时 $AC \perp OC$ ， $\angle OAC = 30^\circ$ 。求顶杆的速度与加速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$OC = e, r = \sqrt{3}e$ ，以等角速度 ω 绕 O 轴转动， $AC \perp OC, \angle OAC = 30^\circ$ 。求顶杆速度与加速度。

动点：顶杆上 A 点；
 动系： Cx_1y_1 固结于凸轮；
 绝对运动：铅垂直线运动；
 相对运动：圆周运动；
 牵连运动：绕 O 轴的定轴转动
 牵连速度 v_c 垂直与 OC ，向左
 绝对速度 v_a 大小未知，铅垂向上
 相对速度 v_r 大小未知，垂直与 CA 。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$OC = e, r = \sqrt{3}e$ ，以等角速度 ω 绕 O 轴转动， $AC \perp OC, \angle OAC = 30^\circ$ 。求顶杆速度与加速度。

负号表示 a_r 的实际方向与所假定的方向相反。

$$v_a = v_c \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} e \omega$$

$$v_r = 2v_c = \frac{4\sqrt{3}}{3} e \omega$$

$$a_a^t = \frac{v_a^2}{AC} = \frac{16}{3} \frac{e^2 \omega^2}{\sqrt{3}e} = \frac{16\sqrt{3}}{9} e \omega^2$$

$$a_a^n = 2a_{v_c} = 2\omega v_c = \frac{8\sqrt{3}}{3} e \omega^2$$

$$a_a = -\frac{2}{9} e \omega^2$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

本章核心内容是运动分析、速度分析和加速度分析。

运动分析、速度与加速度分析中要特别注意运动的相对性，也就是对于不同的参考系，有不同的运动方程、速度和加速度。

所选的参考系应将动点的运动分解为相对运动和牵连运动。

动点和动系间必须有相对运动，即动点和动系不能选在同一个物体上。

动点与动系的选择应使相对运动轨迹简单直观，减少未知量。

定系一般不作说明时指固连于地球上。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

绝对运动指点的运动（直线运动、圆周运动或其它曲线运动）；
 相对运动也是指点的运动，正确判断的要领是观察者在动系上观察动点作何种曲线运动；
 牵连运动是动动系（所固连的刚体）的运动（平移、定轴转动或其它形式刚体运动）。

不要将点的运动与刚体的运动概念相混。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

一般绝对速度概念容易理解掌握，至于相对速度、相对加速度分析之关键在于相对运动轨迹的判断，而牵连速度、牵连加速度完全是新概念，它与牵连运动有联系又有明显区别。牵连运动是动系（刚体）的运动，而牵连速度和牵连加速度分别是动系上牵连点（与动点重合点）的（绝对）速度和（绝对）加速度。要注意动点与牵连点的联系与区别。另外，当动系会转动时，若

$$\omega \times v_r \neq 0$$

则存在科氏加速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

点的速度合成定理的一般形式 $v_a = v_e + v_r$
 点的加速度合成定理一般可写成如下形式

$$a_a^n + a_a^t = a_e^n + a_e^t + a_r^n + a_r^t + a_c$$

上述矢量方程中每一项都有大小和方向两个要素，必须认真分析每一项，才能正确地解决问题。平面问题中，一个矢量方程相当于两个代数方程，一般均能求两个未知量。

加速度合成定理的矢量方程中，各项法向加速度的方向总是指向相应曲线的曲率中心，它们的大小总是可以根据相应的速度大小和曲率半径求出。因此在应用加速度合成定理时，一般应在运动分析的基础上，先进行速度分析，这样各项法向加速度都是已知的。

科氏加速度 a_c 的大小和方向两个要素也是已知的。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

$$a_a^n + a_a^t = a_e^n + a_e^t + a_r^n + a_r^t + a_c$$

在加速度合成定理中，只有三项切向加速度的六个要素可能值得求量，若已知其中的四个要素，则余下的两个要素就可以完全确定。一般方法是先将矢量方程中的各矢量向两个未知要素之一的垂直方向投影。

需要注意的是，因为有些矢量方向是假定的，所以不要用平行四边形法则合成的方法求解。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

小结

明确一个动点、两个参考系，三种运动，一个动点就是指所研究的对象，两个参考系是指动系和定系。一般情况下取与地球固连的参考系为定系（或将定系固定在地球没有相对运动的物体上），动系是相对于定系有运动的参考系（一般指相对于地面运动的参考系）。动系非常基础固定在相对于地面运动的物体上。三种运动是指点的绝对运动、相对运动以及牵连运动。绝对运动和相对运动都是指点的运动，它们的轨迹可能是直线或曲线，而牵连运动，不是点的运动，而是刚体的运动，是动系相对于定系的运动。这要特别注意动点的牵连速度和牵连加速度，不能见地地把它当成是动系相对于定系的牵连速度和牵连加速度。因为只有当动系作平动时，才有以上各点的速度、加速度相等。若动系作其他各运动（转动或其他复杂运动）时，其上各点的速度和加速度是不相等的。因此，动点的牵连速度和牵连加速度，是指牵连点的速度和加速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第7章 刚体的平面运动

- 刚体平面运动是工程中常见而又比较复杂的运动。
- 刚体的平面运动以刚体平移和定轴转动为基础，应用运动分解与合成的方法分析和研究。
- 刚体平面运动就是工程运动学的重点内容，同时也是工程动力学的基础。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第7章 刚体的平面运动

- 内燃机
- 曲柄滑块机构
- 飞机起落架
- 行星齿轮机构
- 惯性筛

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第7章 刚体的平面运动

刚体的平面运动：刚体在运动过程中，刚体上处于同一平面的各点到某一固定平面的距离保持不变。

- 刚体平面运动方程
- 平面图形上各点的速度分析
- 平面图形上各点的加速度分析
- 运动学综合应用举例

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.1 刚体平面运动方程

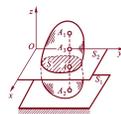
- 刚体平面运动力学模型
- 刚体平面运动方程
- 平面运动分解

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.1 刚体平面运动方程

一、刚体平面运动的力学模型

刚体平面运动—刚体上处于同一平面内各点到某一固定平面的距离保持不变。



特点

刚体上垂直于固定平面的直线上各点具有相同的运动规律；

刚体的运动可以简化为平面图形的运动。

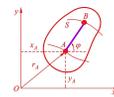
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.1 刚体平面运动方程

一、刚体平面运动的力学模型

刚体平面运动的力学模型 - 平面图形

平面图形 - 在刚体上作平行于固定平面的平面，这样的平面与刚体轮廓的交线所构成的图形。

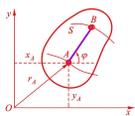


平面图形上的任意直线 - 这一直线的运动可以代表平面图形的运动，也就是刚体的平面运动。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.1 刚体平面运动方程

二、刚体平面运动方程



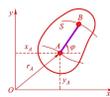
确定线段AB或平面图形在Oxy参考系中的位置，需要3个独立变量 (x_A, y_A, φ) 。其中 x_A, y_A 确定点A在平面内的位置； φ 确定直线AB在平面内的方位；

x_A, y_A, φ 确定了直线AB在参考系中的位置，从而也确定了平面图形在参考系中的位置。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.1 刚体平面运动方程

二、刚体平面运动方程



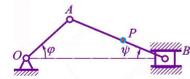
$$\begin{aligned} x_A &= f_1(t) \\ y_A &= f_2(t) \\ \varphi &= f_3(t) \end{aligned}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.1 刚体平面运动方程

二、刚体平面运动方程

例7-1 曲柄滑块机构， $OA = r, AB = l$ ，曲柄OA以等角速度 ω 绕O轴转动。



求：
1. 连杆的平面运动方程；
2. 连杆上P点($AP = l_0$)的运动轨迹、速度与加速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例1: $OA=r, AB=l, OA$ 等角速度 ω 。
求: 连杆运动方程; P 点($AP=l_1$)的运动轨迹、速度与加速度。

解: 1. 确定连杆平面运动的个独立变量与时间的关系

建立参考系Oxy 确定 ψ 与 φ 之间的关系。

$$\frac{l}{\sin\varphi} = \frac{r}{\sin\psi}, \quad \sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi, \quad \omega t = \varphi$$

求: $x_p = r\cos\omega t, \quad y_p = r\sin\omega t, \quad \psi = \arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例1: $OA=r, AB=l, OA$ 等角速度 ω 。
求: 连杆运动方程; P 点($AP=l_1$)的运动轨迹、速度与加速度。

2. 连杆上P点的运动方程

考察连杆AB上P点的坐标与 φ 和 ψ 的关系, 进而建立P点的坐标与时间之间的关系。

$$\frac{l}{\sin\varphi} = \frac{r}{\sin\psi}, \quad \sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi, \quad \omega t = \varphi$$

$$x_p = r\cos\omega t + l_1\cos\psi, \quad x_p = r\cos\omega t + l_1\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2}$$

$$y_p = (l_1)\sin\psi, \quad y_p = \frac{r(l_1)}{l}\sin\omega t$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例1: $OA=r, AB=l, OA$ 等角速度 ω 。
求: 连杆运动方程; P 点($AP=l_1$)的运动轨迹、速度与加速度。

3. 连杆上P点的速度与加速度: 将运动方程分别对时间求一次和二次导数, 可以得到瞬时的速度和加速度表达式

$$v_{Px} = \dot{x}_p = r\omega(\sin\omega t + \frac{1}{2}\frac{r^2}{l^2}\sin 2\omega t)$$

$$v_{Py} = \dot{y}_p = \frac{r\omega(l_1)}{l}\cos\omega t$$

$$a_{Px} = \ddot{x}_p = -r\omega^2(\cos\omega t + \frac{r^2}{l^2}\cos 2\omega t)$$

$$a_{Py} = \ddot{y}_p = -\frac{r\omega^2(l_1)}{l}\sin\omega t$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.1 刚体平面运动方程

三、平面运动分解

$$x_A = f_1(t)$$

$$y_A = f_2(t)$$

$$\varphi = f_3(t)$$

如果图形中的A点固定不动, 则刚体将作定轴转动; 如果线段AB的方位不变 (即 φ 为常数), 则刚体将作平移。

平面图形的运动可以看成是平移和转动的合成运动。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.1 刚体平面运动方程

三、平面运动分解

设在时间间隔 Δt 内, 平面图形由位置I运动到位置II, 相应地, 图形内任取的线段AB从运动到A'B'。

在A点处假想地安放一个平移坐标系, 当图形运动时, 令平移坐标系的 x' 和 y' 轴始终分别平行于定坐标轴 x 和 y , 通常将这一平移的动系的原点称为基点 (base point)。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.1 刚体平面运动方程

三、平面运动分解

平面图形的平面运动分解为随基点的平移 (牵连运动) 和绕基点的转动 (相对运动)。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、平面运动分解

平移的轨迹、速度与加速度都与基点的位置有关。

平面运动的转动角速度以及角加速度与基点的位置无关

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

ω 和 α 分别称为平面图形的角速度和角加速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、平面运动分解

平面运动的转动角速度以及角加速度与基点的位置无关

因为平移坐标系相对于定参考系没有方位的变化, 平面图形的角速度既是平面图形相对于平移系的相对角速度, 也是平面图形相对于定参考系的绝对角速度。

平面运动图形相对转动的角速度和角加速度, 不必指明基点, 只需说明平面图形的角速度和角加速度。

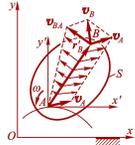
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.2 平面图形上点的速度分析

1. 基点法
2. 速度投影法
3. 瞬时速度中心法

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.2 平面图形上点的速度分析

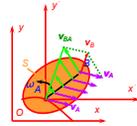


一、基点法

在作平面运动的刚体上任选基点，建立平移动系，动系上各点随平面图形上的点一起运动。在平移动系上观察平面图形的运动为定轴转动，动系自身又作平移，因此，平面图形的运动可视为平移和定轴转动的合成。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.2 平面图形上点的速度分析



一、基点法

平面图形 - S

定系 - Oxy

基点 - A

平移动系 - Axy'

平面图形的角速度 - ω

基点速度 - v_A

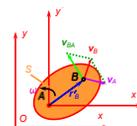
A点的相对速度 - v_BA

A点的绝对速度 - v_B

速度合成定理 - $v_B = v_A + v_{BA}$
 定轴转动时的速度公式 - $v_{BA} = \omega |AB|$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.2 平面图形上点的速度分析



一、基点法

速度合成定理

$v_B = v_A + v_{BA}$

$v_{BA} = v_B - v_A$

$v_{BA} = v_{BA}$

$v_{BA} = v_{BA}$

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$

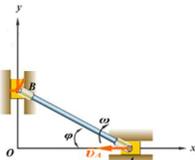
定轴转动刚体上点的线速度公式在平移动系中为:

$v_{BA} = \omega |AB|$

平面图形上点的速度，等于基点的速度和绕基点转动的线速度的矢量和。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-2 椭圆规尺的A端以速度 v_A 沿x 轴的负向运动，如图所示， $AB = l$ 。
 求：B 端的速度以及AB 的角速度。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: \vec{v}_A , $AB=l$ 。求: \vec{v}_B , ω_{AB}

解: 1、AB作平面运动 基点: A

2、 $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$

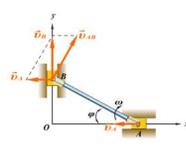
大小? v_B ?

方向? $\sqrt{\quad} \sqrt{\quad}$

$v_B = v_A \cot \varphi$

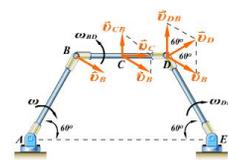
$v_{BA} = \frac{v_A}{\sin \varphi}$

$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{l} = \frac{v_A}{l \sin \varphi}$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-3 图示平面机构， $AB = BD = DE = l = 300\text{mm}$ ，图示位置时， $BD \parallel AE$ ，杆AB的角速度为 $\omega = 5\text{rad/s}$ 。
 求：此瞬时杆DE的角速度和杆BD中点C的速度。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $AB = BD = DE = l = 300\text{mm}$, $BD \parallel AE$, $\omega_{AB} = \omega = 5\text{rad/s}$
 求: ω_{DE} , v_C 。

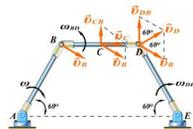
解: 1、BD作平面运动 基点: B

2、 $\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{DB}$

大小? ωl ?

方向? $\sqrt{\quad} \sqrt{\quad}$

$v_D = v_{DB} = v_B = \omega l$



$\omega_{DE} = \frac{v_D}{DE} = \frac{v_B}{l} = \omega = 5\text{rad/s}$ $\omega_{BD} = \frac{v_{DB}}{BD} = \frac{v_B}{l} = \omega = 5\text{rad/s}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $AB = BD = DE = l = 300\text{mm}$, $BD \parallel AE$, $\omega_{AB} = \omega = 5\text{rad/s}$
 求: ω_{DE} , v_C 。

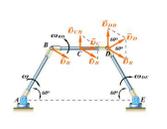
3、 $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$

大小? $\omega l \omega_{BD} l / 2$

方向? $\sqrt{\quad} \sqrt{\quad}$

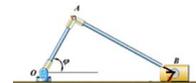
$v_C = \sqrt{v_B^2 - v_{CB}^2} \approx 1.299\text{m/s}$

方向沿BD杆向右



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-4 曲柄连杆机构如图所示， $OA = r$, $AB = \sqrt{3}r$ ，曲柄OA以匀角速度 ω 转动。求当 $\varphi = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 时点B的速度。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $OA = r, AB = \sqrt{3}r, \omega_{OA} = \omega_0$. 求: \vec{v}_B .

解: 1. AB 作平面运动 基点: A

2. $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$
大小? ωr ?
方向 $\swarrow \searrow$

$\varphi = 60^\circ$
 $v_B = v_A / \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}\omega r / 3$
 $\varphi = 0^\circ \quad v_B = 0$
 $\varphi = 90^\circ$
 $v_B = v_A = \omega r, \quad v_{BA} = 0$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.2 平面图形上的速度分析

二、速度投影法

应用速度合成定理

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

等号两侧同点乘以 r_{AB}

$$v_B r_{AB} = v_A r_{AB} + v_{BA} r_{AB}$$

v_{BA} 垂直于 $r_{AB} \Rightarrow v_{BA} r_{AB} = 0$

$$v_B r_{AB} = v_A r_{AB} \quad v_B \cos \beta_B = v_A \cos \beta_A$$

速度投影定理: 平面图形上任意两点的速度在这两点连线上的投影相等。

$$Prj_{AB} \vec{v}_A = Prj_{AB} \vec{v}_B$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、速度投影法

速度投影定理: 平面图形上任意两点的速度在这两点连线上的投影相等。

$$Prj_{AB} \vec{v}_A = Prj_{AB} \vec{v}_B$$

$$v_A \cos \beta_A = v_B \cos \beta_B$$

这个定理的含义也可以从另一角度理解: 平面图形是从刚体上截取的, 图形上, 离两点的距离应保持不变。所以这两点的速度在连线方向的分量必须相等, 否则两点距离必将伸长或缩短。因此, 速度投影定理对所有的刚体运动形式都是适用的。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-5 如图所示的平面机构中, 曲柄 OA 长 100mm , 以角速度 $\omega = 2\text{rad/s}$ 转动。连杆 AB 带动摇杆 CD , 并拖动轮 E 沿水平面纯滚动。已知: $CD = 3CB$, 图示位置时 A, B, E 三点恰在一水平线上, 且 $CD \perp ED$ 。

求: 此瞬时点 E 的速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $OA = 100\text{mm}, \omega_{OA} = \omega = 2\text{rad/s}, CD = 3CB, CD \perp EL$
求: v_E .

解: 1. AB 作平面运动

$$(\vec{v}_B)_{AB} = (\vec{v}_A)_{AB}$$

$$v_B \cos 30^\circ = \omega \cdot OA$$

$$v_B = \frac{\omega \cdot OA}{\cos 30^\circ} = 0.2309\text{m/s}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $OA = 100\text{mm}, \omega_{OA} = \omega = 2\text{rad/s}, CD = 3CB, CD \perp EL$
求: v_E .

2. CD 作定轴转动, 转轴: C

$$v_D = \frac{v_B}{CB} \cdot CD = 3v_B = 0.6928\text{m/s}$$

3. DE 作平面运动

$$(\vec{v}_E)_{DE} = (\vec{v}_D)_{DE}$$

$$v_E \cos 30^\circ = v_D$$

$$v_E = \frac{v_D}{\cos 30^\circ} = 0.8\text{m/s}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-6

已知: 曲柄滑块机构中, 曲柄 $OA = r$, 以等角速度 ω_0 绕 O 轴转动, 连杆 $AB = l$. 在图示情形下连杆与曲柄垂直。

求: 1. 滑块的速度 v_B ;
2. 连杆 AB 的角速度 ω_{AB} .

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$OA = r$, 等角速度 ω_0 转动, $AB = l$, 图示瞬时连杆与曲柄垂直。求: v_B ; ω_{AB} .

解法一: 基点法

解: 1. 选择基点: A (速度已知)
 $v_A = r\omega_0$

2. 以连杆 AB 作为所研究的刚体, 在连杆上的 A 点建立平移系 $x'y'$

3. 将连杆沿铅垂方向的运动绝对运动分解为:
随基点的平移 - 牵连运动;
以 A 点为圆心, AB 为半径的圆周运动 - 相对运动。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$OA = r$, 等角速度 ω_0 转动, $AB = l$, 图示瞬时连杆与曲柄垂直。求: v_B ; ω_{AB} .

解: 4. 应用速度合成定理

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

其中 v_B 的大小 ($v_B = r\omega_0$) 和方向, 以及 v_A 与 v_{BA} 方向都是已知的, 由平行四边形, 得到滑块的速度

$$v_B = \frac{v_A}{\cos \varphi_0} = \frac{r\omega_0}{\cos \varphi_0}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{l} = \frac{r\omega_0 \tan \varphi_0}{l}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$OA=r$, 等角速度 ω_0 转动, $AB=l$. 图示瞬时连杆与曲柄垂直. 求: v_B ; ω_{AB} .

解法2-速度投影法

解: 应用速度投影定理

$$v_A \cos \beta_A = v_B \cos \beta_B$$

$$v_A = r \omega_0, \quad \beta_A = 0, \quad \beta_B = \varphi_0$$

$$v_A = v_B \cos \varphi_0$$

$$v_B = \frac{r \omega_0}{\cos \varphi_0} j$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-7

已知: 曲柄滑块机构中, 曲柄处于水平位置曲柄, $OA=r$ 以等角速度 ω_0 绕 O 轴转动; 连杆 $AB=l$.

求: 1. 滑块的速度 v_B ;
2. 连杆 AB 的角速度 ω_{AB} .

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解法1-基点法

解: 1. 选择基点 A (速度已知) $v_A = r \omega_0$

2. 建立平移系 x, y

3. 将滑块沿铅垂方向的运动绝对运动分解为:
 - 跟随基点的平移—牵连运动;
 - 以 A 点为圆心 AB 为半径的圆周运动—相对运动.

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解法1-基点法

解: 4. 应用速度合成定理

由于 v_B 与 v_A 共线, v_{BA} 垂直于 AB . 根据速度合成定理所形成的平行四边形, 只能是一种特殊情形——一条直线.

$$v_B = v_A + v_{BA}$$

$$v_{BA} = 0, \quad \omega_{AB} = 0$$

瞬时平移

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解法2-速度投影法

解: 应用速度投影定理

$$v_A \cos \beta_A = v_B \cos \beta_B$$

$$v_A = r \omega_0, \quad \beta_A = 0, \quad \beta_B = \beta$$

$$v_A = v_B \cos \beta$$

$$v_{BA} = 0, \quad \omega_{AB} = 0$$

瞬时平移

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-8

已知: 半径为 R 的圆轮在直线轨道上作纯滚动. 轮心速度为 v_0 .

求: 轮缘上 B, C, D 四点的速度.

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-8 半径为 R 的圆轮在直线轨道上作纯滚动. 轮心速度为 v_0 .

求: 轮缘上 B, C, D 四点的速度.

$$\begin{cases} x = r(\omega t - \sin \omega t) \\ y = r(1 - \cos \omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = r \omega (1 - \cos \omega t) \\ v_y = r \omega \sin \omega t \end{cases}$$

$v_{\varphi} = 2\pi = 0 \Rightarrow$ 瞬心 = C

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-8

解: 圆轮与地面接触点, 由于没有相对滑动, 因而在这一瞬时 A 点的速度 $v_A = 0$. 应用基点法求解.

由 $v_0 = R \omega$ 得到

$$\omega = \frac{v_0}{R}$$

$$v_B = 0, \quad v_C = AB \times \omega = \sqrt{2} v_0$$

$$v_D = AC \times \omega = 2v_0, \quad v_D = AD \times \omega = \sqrt{2} v_0$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-8

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§7.2 平面图形上点的速度分析

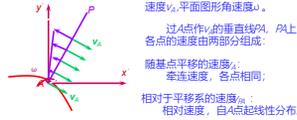
三、速度瞬心法

- > 瞬时速度中心的概念
- > 速度瞬心法
- > 几种特殊情形下瞬心位置的确定

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、速度瞬心法

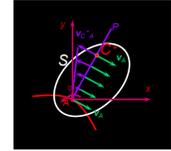
1. 瞬时速度中心的概念



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、速度瞬心法

1. 瞬心概念

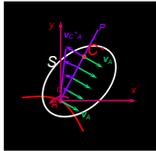


在直线PA上存在一点 C^* ，该点的相对速度 v_{C^*A} 与牵连速度 v_{v_A} 矢量大小相等，方向相反。
 C^* 点的绝对速度 $v_{C^*} = 0$ ， C^* 点称为瞬时速度中心，简称为速度瞬心。
 $AC^* = \frac{v_A}{\omega}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、速度瞬心法

1. 瞬心概念



速度瞬心性质
瞬时性 - 不同的瞬时，有不同的速度瞬心；
唯一性 - 某一瞬时只有一个速度瞬心；
瞬时转动特性 - 平面图形在某一瞬时的运动都可以视为绕这一瞬时的速度瞬心作瞬时转动。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、速度瞬心法

2. 应用瞬时速度中心确定刚体平面运动的速度——速度瞬心法



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、速度瞬心法

2. 应用瞬时速度中心确定刚体平面运动的速度——速度瞬心法



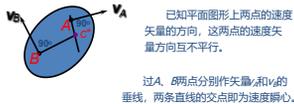
平面图形上任意点例如B点的速度为
 $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$
其中 $v_A = v_C = 0, v_{BA} = v_{BC} \cdot \omega$
 $v_B = v_B \cdot \omega = \omega [C]B]$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、速度瞬心法

3. 几种特殊情形下瞬时速度中心位置的确定

第一种情形

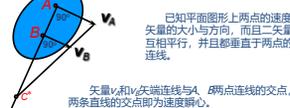


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、速度瞬心法

3. 几种特殊情形下瞬时速度中心位置的确定

第二种情形



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、速度瞬心法

3. 几种特殊情形下瞬时速度中心位置的确定

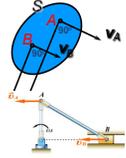
第三种情形



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

三、速度瞬心法

3. 几种特殊情形下瞬时速度中心位置的确定



第四种情形

已知平面图形上两点的速度矢量的大小与方向，而且二矢量互相平行、方向相同，但二者都不垂直于两点的连线。

速度瞬心在哪里？

瞬时平动

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-9

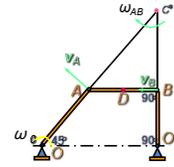
已知：四连杆机构中
 $O_1B = l, AB = \frac{3}{2}l, AD = DB$
 $O_2A \parallel O_1B$ ，绕 O_1 轴转动。
 求：1. B 和 D 点的速度；
 2. AB 杆的角速度。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-10

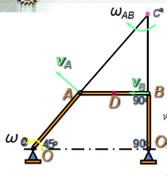
已知：机构作平面运动， O_1A 和 O_2B 都作定轴转动，A、B 二点的速度 v_A 和 v_B 的方向都可以确定，作二者的垂直线，相交于 C ，此即速度瞬心。
 图中的几何关系：
 $O_1A = \sqrt{2}l, AB = BC^* = \frac{3}{2}l$
 $AC^* = \frac{3\sqrt{2}}{2}l, DC^* = \frac{3\sqrt{2}}{4}l$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-11

已知：椭圆规尺的 A 端以速度 v_A 沿 x 轴的负向运动，如图所示， $AB = l$ 。
 用瞬心法求 B 端的速度以及尺 AB 的角速度。

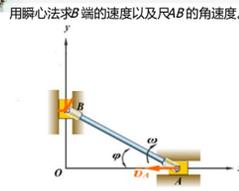


解：C 为 AB 杆速度瞬心。
 $v_A = CA \cdot \omega_{AB} = \sqrt{2}l \omega_{AB}$
 $\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC^*} = \frac{\sqrt{2}l \omega_{AB}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}l} = \frac{2}{3} \omega_{AB}$
 $v_B = BC^* \cdot \omega_{AB} = \frac{v_A}{AC^*} \cdot \frac{3}{2}l \times \frac{2}{3} \omega_{AB} = l \omega_{AB}$
 $v_D = DC^* \cdot \omega_{AB} = \frac{3\sqrt{2}}{2}l \times \frac{2}{3} \omega_{AB} = \sqrt{2}l \omega_{AB}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-10

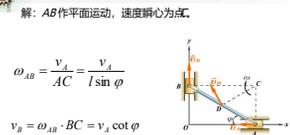
已知： $\dot{\varphi}, v_A, AB = l$ 。求： v_B, ω_{AB} 。
 解： AB 作平面运动，速度瞬心为 C。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-11

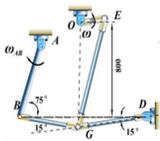
解： $\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l \sin \varphi}$
 $v_B = \omega_{AB} \cdot BC = v_A \cot \varphi$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-11

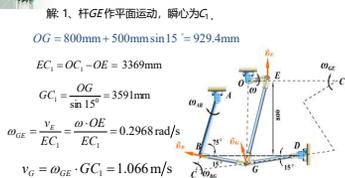
已知： $AB = 600\text{mm}, OE = 100\text{mm}, \omega = 10 \text{ rad/s}, BG = GD = 500\text{mm}$ 。
 解：1. 杆 GE 作平面运动，瞬心为 C_1 。
 $OG = 800\text{mm} + 500\text{mm} \sin 15^\circ = 929.4\text{mm}$
 $EC_1 = OC_1 - OE = 3369\text{mm}$
 $GC_1 = \frac{OG}{\sin 15^\circ} = 3591\text{mm}$
 $\omega_{GE} = \frac{v_E}{EC_1} = \frac{\omega \cdot OE}{EC_1} = 0.2968 \text{ rad/s}$
 $v_G = \omega_{GE} \cdot GC_1 = 1.066 \text{ m/s}$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-11

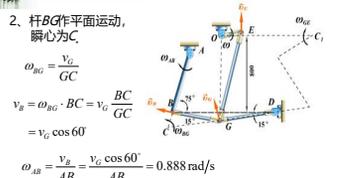
2. 杆 BG 作平面运动，瞬心为 C_2 。
 $\omega_{BG} = \frac{v_G}{GC_2}$
 $v_B = \omega_{BG} \cdot BC_2 = v_G \frac{BC_2}{GC_2} = v_G \cos 60^\circ$
 $\omega_{AB} = \frac{v_B}{AB} = \frac{v_G \cos 60^\circ}{AB} = 0.888 \text{ rad/s}$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-11

已知： $AB = 600\text{mm}, OE = 100\text{mm}, \omega = 10 \text{ rad/s}, BG = GD = 500\text{mm}$ 。
 解：1. 杆 GE 作平面运动，瞬心为 C_1 。
 $OG = 800\text{mm} + 500\text{mm} \sin 15^\circ = 929.4\text{mm}$
 $EC_1 = OC_1 - OE = 3369\text{mm}$
 $GC_1 = \frac{OG}{\sin 15^\circ} = 3591\text{mm}$
 $\omega_{GE} = \frac{v_E}{EC_1} = \frac{\omega \cdot OE}{EC_1} = 0.2968 \text{ rad/s}$
 $v_G = \omega_{GE} \cdot GC_1 = 1.066 \text{ m/s}$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



第7章 刚体平面运动

§7-3 平面图形点的加速度分析

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



§7-3 平面图形点的加速度分析

已知平面图形上一点A的加速度 a_A 、图形的角速度与角加速度 α ，应用加速度合成定理，可以确定平面图形上任一点的加速度：

1. 选择加速度已知的点为基点；
2. 建立平移系 $Ax'y'$ ；
3. 应用牵连运动为平移的加速度合成定理 $a_B = a_A + a_{B/A}$ 可以确定图形上任一点的加速度。这时，

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}, \quad \mathbf{a}_{B/A} = \alpha \times \mathbf{r}_{AB}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



§7-3 平面图形点的加速度分析

已知平面图形上点A的加速度、图形的角速度与角加速度，与平面图形上各点速度分析相类似，选点A为基点，建立平移系，分解图形的运动，从而也分解了图形上任一点的运动。由于动点的牵连运动为平移，可应用动系为平移时的加速度合成定理，确定动点的绝对加速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



§7-3 平面图形点的加速度分析

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}^t + \mathbf{a}_{B/A}^n$$

$$= \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})$$

$$= \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



§7-3 平面图形点的加速度分析

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}^t + \mathbf{a}_{B/A}^n$$

$$= \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})$$

$$= \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})$$

平面图形上任意一点的加速度等于基点的加速度与这一点对于以基点为坐标原点的平移系的相对切向加速度和法向加速度的矢量和。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例7-12

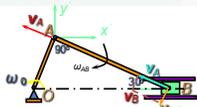
曲柄滑块机构， $OA=r$ ， $AB=l$ ，曲柄以等角速度 ω_0 绕O轴旋转。求图示瞬时滑块的加速度 a_B 和连杆AB的角加速度 α_{AB} 。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

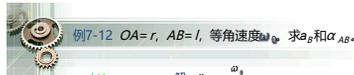


例7-12 $OA=r$ ， $AB=l$ ，等角速度 ω_0 ，求 a_B 和 α_{AB} 。



解：1. 确定连杆的角速度：以A为基点，建立平移系 xy 。
 $v_A = r\omega_0$ ， $v_{AB} = v_A \tan 30^\circ = r\omega_0 \tan 30^\circ$
 $\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{l} = \frac{r}{l}\omega_0 \tan 30^\circ = \frac{\omega_0}{3}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

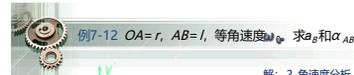


例7-12 $OA=r$ ， $AB=l$ ，等角速度 ω_0 ，求 a_B 和 α_{AB} 。

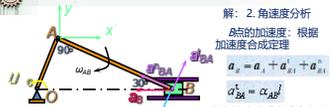


解： $\omega_{AB} = \frac{\omega_0}{3}$
 2. 加速度分析
 A点的加速度： $a_A = r\omega_0^2$
 B点的加速度： $a_B = a_A + a_{B/A}^t + a_{B/A}^n$
 $a_{B/A}^t = \alpha_{AB} l$
 $a_{B/A}^n = \omega_{AB}^2 l$
 将加速度合成定理中各项向 O 方向投影
 $a_B \cos 30^\circ = a_A^t = \frac{\omega_0^2 l}{9}$ ， $a_B = \frac{2\sqrt{3}}{27}\omega_0^2 l$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例7-12 $OA=r$ ， $AB=l$ ，等角速度 ω_0 ，求 a_B 和 α_{AB} 。



解：2. 角速度分析
 B点的加速度：根据加速度合成定理
 $a_B = a_A + a_{B/A}^t + a_{B/A}^n$
 $a_{B/A}^t = \alpha_{AB} l$
 $a_{B/A}^n = \omega_{AB}^2 l$
 将加速度合成定理中各项向 x 方向投影
 $a_B \sin 30^\circ = a_A^t - a_{B/A}^n = \frac{\omega_0^2 r}{3} - \frac{\omega_0^2 l}{27}$
 $a_B = \frac{a_A^t}{1} = \frac{\omega_0^2 r}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\omega_0^2 l$

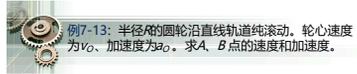
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例7-13

已知: 半径为 R 的圆轮在直线轨道上作纯滚动。轮心速度为 V_O 、加速度为 a_O 。
求: 轮缘上 A 、 B 二点的速度和加速度。

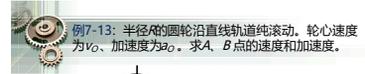
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例7-13: 半径为 R 的圆轮沿直线轨道纯滚动。轮心速度为 V_O 、加速度为 a_O 。求 A 、 B 点的速度和加速度。

解: 1. 基点法的速度分析:
确定圆轮的转动角速度
以 O 点为基点, 轮缘上任一点 P 的运动可以分解为:
跟随基点 O 的平移 - 牵连运动;
相对于平移系 $Ox'y'$ 绕 O 点的转动 - 相对运动。
为建立转动角速度与轮心速度之间的关系, 考察圆轮滚动时 A 点转过的角度与轮心移动的距离之间的关系。

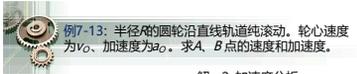
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例7-13: 半径为 R 的圆轮沿直线轨道纯滚动。轮心速度为 V_O 、加速度为 a_O 。求 A 、 B 点的速度和加速度。

解: 1. 基点法的速度分析:
确定圆轮的转动角速度
 $s = R\phi$
 $\dot{s} = R\dot{\phi}$
 $V_O = R\omega_O$
 $\omega_O = \frac{V_O}{R}$
则圆轮滚动时的角加速度 $\alpha_O = \dot{\omega}_O = \frac{\dot{V}_O}{R} = \frac{a_O}{R}$

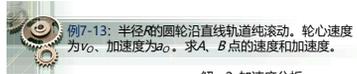
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例7-13: 半径为 R 的圆轮沿直线轨道纯滚动。轮心速度为 V_O 、加速度为 a_O 。求 A 、 B 点的速度和加速度。

解: 2. 加速度分析:
 $\omega_O = \frac{V_O}{R}$ $\alpha_O = \frac{a_O}{R}$
A点:
 $a_A = a_O + a_{AO}^n + a_{AO}^t$
 $a_{AO}^n = R\omega_O^2 = a_O$
 $a_{AO}^t = R\alpha_O = \frac{V_O}{R} \cdot \frac{V_O}{R}$
 $a_A = \frac{V_O^2}{R} j$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例7-13: 半径为 R 的圆轮沿直线轨道纯滚动。轮心速度为 V_O 、加速度为 a_O 。求 A 、 B 点的速度和加速度。

解: 2. 加速度分析:
 $\omega_O = \frac{V_O}{R}$ $\alpha_O = \frac{a_O}{R}$
B点:
 $a_B = a_O + a_{BO}^n + a_{BO}^t$
 $a_{BO}^n = R\alpha_O = a_O$
 $a_{BO}^t = R\omega_O^2 = \frac{V_O^2}{R}$
 $a_B = (a_O + \frac{V_O^2}{R}) i + a_O j$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



基点法求平面图形内各点的加速度小结

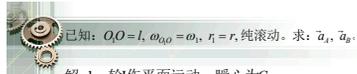
A: 基点 $Ax'y'$: 平移坐标系
 $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_B^r + \vec{a}_B^t$
 $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$
 \vec{a}_{BA}^n 大小 $a_{BA}^n = AB \cdot \alpha$
方向垂直于 AB , 指向同 α
 \vec{a}_{BA}^t 大小 $a_{BA}^t = \omega^2 \cdot AB$
方向由 B 指向 A
平面图形内任一点的加速度等于基点的加速度与该点随图形绕基点转动的切向加速度和法向加速度的矢量和。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例7-14 如图所示, 在外啮合行星齿轮机构中, 系杆以匀角速度 ω_1 绕 O 转动。大齿轮固定, 行星轮半径为 r , 在大轮上只滚不滑。设和行星轮缘上的两点, 点 A 在 O_1O 的延长线上, 而点 B 在垂直于 O_1O 的半径上。求点 A 和 B 的加速度。

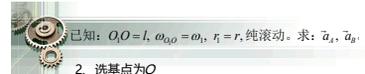
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



已知: $O_1O=l$, $\omega_{O_1O}=\omega_1$, $r_1=r$, 纯滚动。求: \vec{a}_A, \vec{a}_B 。

解: 1. 轮作平面运动, 瞬心为 C 。
 $\omega_2 = \frac{v_O}{r} = \frac{\omega_1 l}{r}$
 $\alpha = \frac{d\omega_2}{dt} = 0$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



已知: $O_1O=l$, $\omega_{O_1O}=\omega_1$, $r_1=r$, 纯滚动。求: \vec{a}_A, \vec{a}_B 。

2. 选基点为 O
 $\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^t$
大小? $l\omega_1^2$ 0 $r\omega_2^2$
方向? \checkmark \checkmark \checkmark
 $a_A = a_O + a_{AO}^n$
 $= l\omega_1^2 + \frac{l^2}{r}\omega_1^2$
 $= l\omega_1^2(1 + \frac{l}{r})$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $O_1O_2 = l, \omega_{O_1O_2} = \omega_1, r_1 = r_2, \text{纯滚动}$. 求: \vec{a}_A, \vec{a}_B .

3、 $\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{a}'_{BO} + \vec{a}''_{BO}$
 大小? $\sqrt{10\omega_1^2} \sqrt{10} \sqrt{r\omega_1^2}$
 方向?

$a_B = \sqrt{a_O^2 + (a'_{BO})^2}$
 $= l\omega_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2}$

$\theta = \arctan \frac{a''_{BO}}{a'_{BO}} = \arctan \frac{r}{l}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例7-15 如图所示, 在椭圆规机构中, 曲柄O以匀角速度 ω 绕O轴转动, $OD = AD = BD = l$.

求: 当 $\varphi = 60^\circ$ 时, 尺AB的角速度和点A的加速度.

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $\omega_{OD} = \omega = \text{常数}, OD = AD = BD = l, \varphi = 60^\circ$.

求: α_{AB}, a_P .

解: 1、AB作平面运动, 瞬心为C.
 $\omega_{AB} = \frac{v_D}{CD} = \frac{\omega \cdot l}{l} = \omega$

2、选D为基点
 $a_D = l\omega^2$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $\omega_{OD} = \omega = \text{常数}, OD = AD = BD = l, \varphi = 60^\circ$.

求: α_{AB}, a_P .

$\vec{a}_A = \vec{a}_D + \vec{a}'_{AD} + \vec{a}''_{AD}$
 大小? $l\omega^2$? $l\omega^2$
 方向? $\sqrt{\quad} \sqrt{\quad} \sqrt{\quad} \sqrt{\quad}$
 分别沿 ξ 轴和 η 轴投影
 $a_A \cos \varphi = a_D \cos(\pi - 2\varphi) - a'_{AD}$
 $0 = -a_D \sin \varphi + a'_{AD} \cos \varphi + a''_{AD} \sin \varphi$
 解得 $a_A = -l\omega^2, a'_{AD} = 0, \alpha_{AB} = \frac{a''_{AD}}{AD} = 0$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例

工程中的机构都是由数个物体组成的, 各物体间通过连接点而传递运动. 为分析机构的运动, 首先要分清各物体的运动形式, 然后进行运动分析, 计算有关连接点的速度和加速度.

为分析某点的运动, 如能找出其位置与时间的函数关系, 则可直接建立运动方程, 用解析方法求其运动全过程的速度和加速度.

当难以建立点的运动方程, 或只对机构某些瞬时位置的运动参数感兴趣时, 可根据刚体各种不同运动的形式, 确定刚体的运动与其上一点运动的关系, 并用合成运动定理或平面运动的理论来分析相关的两个点在某一瞬时的速度和加速度联系.

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例

平面运动理论用以分析同一平面运动刚体上两个不同点间的速度和加速度联系. 当两个刚体相接触而有相对滑动时, 则需用合成运动的理论分析两个不同刚体上相关点的速度和加速度联系.

分析复杂机构运动时, 可能同时有平面运动和点的合成运动问题, 应注意分别分析. 综合应用有关理论. 有时同一问题可能有多种分析方法, 应经过分析、比较后, 选用较简便的方法求解.

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

多选题 4分

平面图形在其平面内运动, 某瞬时其上有两点的加速度矢量相同, 则一下说法中正确的是:

A 其上各点速度在该瞬时一定相等;

B 其上各点加速度在该瞬时一定相等;

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例

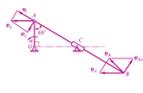
例题1

平面机构中, 曲柄OA以匀角速度 ω 绕O轴转动, 曲柄长OA=6r, 摇杆AB可在套筒C中滑动, 套筒C绕定轴C转动. AB=4r, 套筒C绕定轴C转动.

试求: 图示瞬时 ($\angle OAB=60^\circ$) B点的速度和加速度.

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题 1

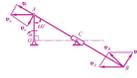


解: 由已知条件, OA 杆和套环 C 均作定轴转动, AB 杆作平面运动。现已知 AB 杆上 A 点的速度和加速度, 欲求 B 点的速度和加速度。首先求 AB 杆的角速度和角加速度。

因为 AB 杆在套环中滑动, 所以 B 杆的角速度和角加速度与套环 C 的角速度和角加速度相同。所以, 以动点: 套环 C 为动系, 则其绝对运动为以 O 点为圆心, OA 为半径的圆周运动; 相对运动为沿套环轴 AB 的直线运动; 牵连运动为绕 C 轴的定轴转动。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题 1



解: 1. 速度分析

$$v_B = v_C + v_{BC}$$

$$v_B = r\omega$$

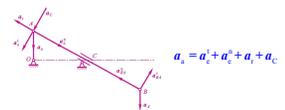
各矢量方向如图中所示于理解

$$v_B = \frac{\sqrt{3}}{2}r\omega \quad v_C = \frac{1}{2}r\omega \quad \omega_B = \frac{v_B}{AC} = \frac{\omega}{4}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题 1

解: 2. 加速度分析



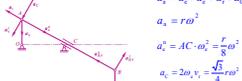
$$a_B = a_C + a_{BC} + a_{BC}$$

$$a_B = r\omega^2 \quad a_C = AC \cdot \omega_C^2 = \frac{r}{8}\omega^2 \quad a_{BC} = 2\omega v_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{4}r\omega^2$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题 1

解: 2. 加速度分析



$$a_B = a_C + a_{BC} + a_{BC}$$

$$a_B = r\omega^2$$

$$a_C = AC \cdot \omega_C^2 = \frac{r}{8}\omega^2$$

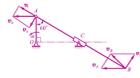
$$a_{BC} = 2\omega v_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{4}r\omega^2$$

各矢量方向如图中所示, 将矢量方程中各项向方向投影, 得到

$$a_B \cos 30^\circ = a_C + a_{BC} \quad a_B = \frac{\sqrt{3}}{4}r\omega^2 \quad a_C = \frac{a_B}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题 1



解: 3. 讨论

本例中确定速度时, 也可取套环为动点, AB 杆为动系, 其绝对运动为静止, 相对运动为沿 CD 直线, 牵连运动为平面运动, 此时可假定绝对速度为零, 得相对速度和牵连速度等值、反向, 从而由 AB 杆上与动点重合点 C (图中未画出) 的速度方向确定 C 的速度方向及大小, 确定 C 的角速度和角加速度, 不过要确定角加速度就不如上述方法简便。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题 2

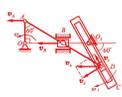
例题 2

曲柄连杆机构带动摇杆 CD 绕 O 轴摆动, 在连杆 BC 上装有两个滑头, 滑头在水平槽内滑动, 而滑头 C 则在摇杆 CD 的槽内滑动。已知: 曲柄 OA=50 mm, 曲柄 O 轴转动的角速度为 10 rad/s, 在图示位置时, 曲柄与水平线夹角为 45°, 摇杆 CD 与水平线夹角为 30°, ∠OAB=60°, 距离 OD=70 mm。

求: 摇杆的角速度和角加速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题 2



解: 1. 速度分析

根据 C 处的约束, v_B 必须沿水平方向

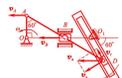
由于 v_B 平行于 v_D , 可以确定 AD 杆作瞬时平移, 所以有

$$v_D = v_B = \omega \cdot OD \quad \omega_D = \omega$$

选 AD 杆上的 D 点为动点, 摇杆 CD 为动系, 则绝对运动: 平面曲线; 相对运动: 沿 CD 槽作直线运动; 牵连运动: 绕 C 轴定轴转动。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题 2



解: 1. 速度分析

各速度如图所示, 由

$$v_B = v_C + v_{BC} \quad v_B = v_D$$

$$v_D = v_C \cos 60^\circ = \omega \times OA \times \cos 60^\circ = 0.5 \text{ m/s}$$

$$v_C = v_D \sin 60^\circ = \omega \times OD \times \sin 60^\circ = 0.433 \text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{v_C}{OD} = 6.19$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题 2

解: 2. 加速度分析

为求 a_C , 需要分析 C 点的加速度, 为此先求出 C 杆的角加速度

以 A 为基点, B 点加速度为

$$a_B = a_A + a_{BA} + a_{BA}$$

各矢量的方向如图中所示, 矢量的模:

$$a_A = OA \cdot \omega^2 \quad a_{BA} = 0$$

将矢量方程中的各项向矢量 a_B 的作用线方向投影, 解得 AD 杆的角加速度

$$a_{BA} = \frac{2}{\sqrt{3}}a_A \quad a_{BA} = \frac{a_{BA}}{AB} = \frac{a_A^2}{\sqrt{3}}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题2

解: 1. 确定CD杆的角速度

$$a_{Dx} = \frac{2}{\sqrt{3}} a_c \quad a_{Dy} = \frac{a_{Dx}}{AB} \cdot \frac{a_c}{\sqrt{3}}$$

选D为动点, O,D杆为动系, 分析D点加速度, 有

$$a_c = a_D = a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2 + a_c^2$$

上式中 a_{Dx} 、 a_{Dy} 的大小未知, a_c 的大小及方向均未知, 故有四个未知量, 所以需要寻找补充方程,

再以A为基点, 分析D点加速度, 有

$$a_D = a_A + a_{DA}^t + a_{DA}^n$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题2

$$a_{Dx} = a_A + a_{DA}^t + a_{DA}^n$$

$$a_{Dy} = a_B + a_{DB}^t + a_{DB}^n$$

上式中只有 a_{DA}^t 、 a_{DB}^t 的大小两个未知量, 式中其它量分别为

$$a_A = OA \cdot \omega^2 \quad a_{DB}^n = AD \cdot \omega_1^2 \quad a_{DA}^n = OD \cdot \omega_2^2$$

$$a_c = 2\omega_1 v_c \quad a_{DA}^n = 0$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题2

$$a_x + a_{Dx} + a_{Dy} = a_x^2 + a_x^2 + a_c^2$$

$$a_x = OA \cdot \omega^2 \quad a_{Dy} = AD \cdot \omega_1^2$$

$$a_c^2 = OD \cdot \omega_2^2 \quad a_c = 2\omega_1 v_c$$

$$a_{Dy} = 0$$

将矢量式中的各项向矢量 v_c 上投影, 有

$$a_x \cos 60^\circ - a_{Dy} \cos 30^\circ = a_c^2 - a_c$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题2

$$a_c \cos 60^\circ - a_{Dy} \cos 30^\circ = a_c^2 - a_c$$

由此解得

$$a_c^2 - a_c = \frac{a_c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a_c}{2}$$

$$a_c = \frac{a_c^2}{OD} = 78.2 \text{ rad/s}^2$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题2

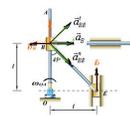
解: 4. 讨论

本例已知OA杆的运动, 欲求O,D杆的运动, 其关键是充分利用作瞬时平移的“中介杆”AC的已知条件, 欲求O点的速度和加速度, 又要充分利用两点的约束条件。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

运动学综合应用举例 例题3

例3 图示平面机构, 滑块可沿杆OA滑动。杆BE与BD分别与滑块交接, BD杆可沿水平轨道运动。滑块B以匀速沿铅直导轨向上运动, 杆BE长为 $\sqrt{2}l$ 。图示瞬时杆OA铅直, 且与杆BE夹角为 5° 。求: 该瞬时杆OA的角速度与角加速度。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $v_E = v = \text{常数}$, $BE = \sqrt{2}l$, $\angle OBE = 45^\circ$, $OA \perp OE$ 。
求: ω_{O1E} , α_{O1E}

解: 1、杆BE作平面运动, 瞬时心在O点。

$$\omega_{BE} = \frac{v}{OE} = \frac{v}{l}$$

$$v_B = \omega_{BE} \cdot OB = v$$

取E为基点

$$\vec{a}_B = \vec{a}_E + \vec{a}_{BE}^t + \vec{a}_{BE}^n$$

大小? 0? ? $\omega_{O1E}^2 \cdot BE$

方向 \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $v_E = v = \text{常数}$, $BE = \sqrt{2}l$, $\angle OBE = 45^\circ$, $OA \perp OE$ 。
求: ω_{O1E} , α_{O1E}

沿BE方向投影

$$a_B \cos 45^\circ = a_{BE}^n = \frac{\sqrt{2}v^2}{l}$$

$$a_B = \frac{a_{BE}^n}{\cos 45^\circ} = \frac{2v^2}{l}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $v_E = v = \text{常数}$, $BE = \sqrt{2}l$, $\angle OBE = 45^\circ$, $OA \perp OE$ 。
求: ω_{O1E} , α_{O1E}

2、动点: 滑块B 动系: OA杆

绝对运动: 直线运动BD
相对运动: 直线运动OA
牵连运动: 定轴转动轴O

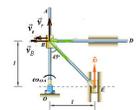
$\vec{v}_B = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

大小 v ? ?

方向 \checkmark \checkmark \checkmark

沿BD方向投影
 $v_e = v_e = v$

$v_r = 0 \quad \omega_{O1E} = \frac{v_e}{OB} = \frac{v}{l}$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $v_C = v = \text{常数}$, $BE = \sqrt{3}$, $\angle OBE = 45^\circ$, $OA \perp OE$.
求: ω_{AB} , α_{AB}

$\vec{a}_A = \vec{a}'_A + \vec{a}''_A + \vec{a}_C$

大小 $\frac{2v^2}{l}$? $\omega_{AB}^2 l$? 0
方向 $\sqrt{\quad}$ $\sqrt{\quad}$ $\sqrt{\quad}$ $\sqrt{\quad}$

沿BD方向投影

$a'_A = a_C = \frac{2v^2}{l}$
 $\alpha_{OA} = \frac{a'_C}{OB} = \frac{2v^2}{l^2}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例4 在如图所示平面机构中, 杆C在导轨中以匀速平移, 通过铰链带动杆AB沿导套O运动, 导套O与杆AC距离为l. 图示瞬时杆AB与杆AC夹角为 $\varphi = 60^\circ$.
求: 此瞬时杆AB的角速度及角加速度.

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $v_{AC} = v = \text{常数}$, $l, \varphi = 60^\circ$. 求: ω_{AB} , α_{AB}

解: 1、动点: 铰链A 动系: 套筒O

绝对运动: 直线运动(AC)
相对运动: 直线运动(AB)
牵连运动: 定轴转动(轴O)

2、 $\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_r$
大小 v ? ?
方向 $\sqrt{\quad}$ $\sqrt{\quad}$ $\sqrt{\quad}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $v_{AC} = v = \text{常数}$, $l, \varphi = 60^\circ$. 求: ω_{AB} , α_{AB}

$v_A = v_C \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} v$
 $v_r = v_C \cos 60^\circ = \frac{v}{2}$
 $\omega_{AB} = \frac{v_A}{AO} = \frac{3v}{4l}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $v_{AC} = v = \text{常数}$, $l, \varphi = 60^\circ$. 求: ω_{AB} , α_{AB}

$\vec{a}_A = \vec{a}'_A + \vec{a}''_A + \vec{a}_C$
大小 0 ? $\omega_{AB}^2 \cdot AO$? $2\omega_{AB} v$
方向 $\sqrt{\quad}$ $\sqrt{\quad}$ $\sqrt{\quad}$ $\sqrt{\quad}$

沿 \vec{a}'_A 方向投影

$0 = a'_A - a_C$
 $a'_A = a_C = \frac{3v^2}{4l}$
 $\alpha_{AB} = \frac{a'_A}{AO} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $v_{AC} = v = \text{常数}$, $l, \varphi = 60^\circ$. 求: ω_{AB} , α_{AB}

另解: 1、取坐标系Oxy
2、A点的运动方程
 $x_A = l \cot \varphi$
3、速度、加速度
 $\dot{x}_A = -l\dot{\varphi} \sin^2 \varphi = -v$
 $\dot{\varphi} = \frac{v}{l} \sin^2 \varphi$
 $\ddot{\varphi} = \frac{v}{l} \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi} = \frac{v^2}{l^2} \sin^2 \varphi \cdot \sin 2\varphi$
当 $\varphi = 60^\circ$ 时有 $\omega_{AB} = \dot{\varphi} = \frac{3v}{4l}$ $\alpha_{AB} = \ddot{\varphi} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例5 如图所示平面机构, AB长为l, 滑块A可沿摇杆OC的长槽滑动. 摇杆OC以角速度 ω 绕轴O转动, 滑块B以匀速 $v = l\omega$ 沿水平导轨滑动. 图示瞬时C铅直, AB与水平线OB夹角为 30° .
求: 此瞬时A杆的角速度及角加速度.

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $AB = l$, $\omega_{OC} = \omega = \text{常数}$, $v_B = l\omega$, $OC \perp OB$
求: ω_{AB} , α_{AB}

解: 1、杆AB作平面运动, 基点为B.
 $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB}$
 $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB} + \vec{a}'_{AB}$

2、动点: 滑块A
动系: OCF
绝对运动: 未知
相对运动: 直线运动 (OC)
牵连运动: 定轴转动 (轴O)

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $AB = l$, $\omega_{OC} = \omega = \text{常数}$, $v_B = l\omega$, $OC \perp OB$.
求: ω_{AB} , α_{AB}

$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_r = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB}$
大小 $\omega \cdot OA$? $l\omega$?
方向 $\sqrt{\quad}$ $\sqrt{\quad}$ $\sqrt{\quad}$ $\sqrt{\quad}$

沿 \vec{v}_B 方向投影 $v_B - v_{AB} \sin 30^\circ = v_C = \frac{l\omega}{2}$
 $v_{AB} = 2(v_B - v_C) = l\omega$
 $\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{l} = \omega$

沿 \vec{v}_C 方向投影
 $v_C = v_{AB} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} l\omega$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $AB=l, \omega_{OC}=\omega=$ 常数, $v_B=l\omega, OC \perp OB$.
 求: ω_{AB}, α_{AB}

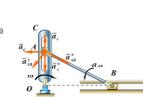
$\vec{a}_A = \vec{a}'_C + \vec{a}''_C + \vec{a}_C, \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}'_{AB} + \vec{a}''_{AB}$

大小 $0 \quad \frac{l\omega^2}{2} ? \quad 2\omega v_B \quad 0 ? \quad \omega^2 l_{AB}$
 方向 $\sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad}$

沿 \vec{a}_C 方向投影
 $a_C = a'_{AB} \sin 30^\circ - a''_{AB} \cos 30^\circ$

从而 $a'_{AB} = 3\sqrt{3}l\omega^2$

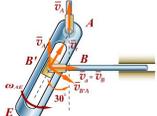
$\alpha_{AB} = \frac{a'_{AB}}{AB} = 3\sqrt{3}\omega^2$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例6 如图所示平面机构中, 杆C铅直运动, 杆BD水平运动, A为铰链, 滑块可沿槽杆AB中的直槽滑动. 图示瞬时 $AB=60\text{mm}, \theta=30^\circ, v_A=10\sqrt{3}\text{mm/s}, a_A=10\sqrt{3}\text{mm/s}^2, v_B=50\text{mm/s}, a_B=10\text{mm/s}^2$.

求: 该瞬时槽杆AB的角速度、角加速度及滑块相对A的加速度.



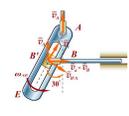
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $AB=60\text{mm}, \theta=30^\circ, v_A=10\sqrt{3}\text{mm/s}, a_A=10\sqrt{3}\text{mm/s}^2, v_B=50\text{mm/s}, a_B=10\text{mm/s}^2$.

求: $\omega_{AE}, \alpha_{AE}, \vec{v}_{B/A}$

解: 1. 动点: 滑块B 动系: 杆AE
 绝对运动: 直线运动(BD)
 相对运动: 直线运动(AE)
 牵连运动: 平面运动

$\vec{v}_B = \vec{v}_E + \vec{v}_r \quad \dots (a)$
 $\vec{a}_B = \vec{a}_E + \vec{a}_r + \vec{a}_C \quad \dots (b)$



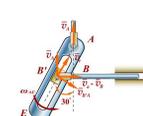
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $AB=60\text{mm}, \theta=30^\circ, v_A=10\sqrt{3}\text{mm/s}, a_A=10\sqrt{3}\text{mm/s}^2, v_B=50\text{mm/s}, a_B=10\text{mm/s}^2$.

求: $\omega_{AE}, \alpha_{AE}, \vec{v}_{B/A}$

2. 杆AE作平面运动 基点: A
 $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad \dots (c)$
 $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}'_{B/A} + \vec{a}''_{B/A} \quad \dots (d)$

3. 将(c)代入(a)
 $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_r$
 大小 $v_B \quad v_A ? ?$
 方向 $\sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad}$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

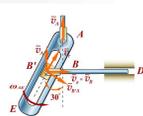
已知: $AB=60\text{mm}, \theta=30^\circ, v_A=10\sqrt{3}\text{mm/s}, a_A=10\sqrt{3}\text{mm/s}^2, v_B=50\text{mm/s}, a_B=10\text{mm/s}^2$.

求: $\omega_{AE}, \alpha_{AE}, \vec{v}_{B/A}$

沿 \vec{v}_B 方向投影
 $v_B \cos 30^\circ = -v_A \cos 60^\circ + v_{B/A}$

沿 \vec{v}_A 方向投影
 $v_B \sin 30^\circ = v_A \sin 60^\circ + v_r$

解得 $v_r = 10\text{mm/s}$
 $\omega_{AE} = \frac{v_{B/A}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{rad/s}$



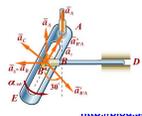
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知: $AB=60\text{mm}, \theta=30^\circ, v_A=10\sqrt{3}\text{mm/s}, a_A=10\sqrt{3}\text{mm/s}^2, v_B=50\text{mm/s}, a_B=10\text{mm/s}^2$.

求: $\omega_{AE}, \alpha_{AE}, \vec{v}_{B/A}$

4. 将(d)代入(b)
 $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}'_{B/A} + \vec{a}''_{B/A} + \vec{a}_r + \vec{a}_C$

大小 $a_B \quad a_A ? \quad \omega_{AE}^2 AB ? \quad 2\omega_{AE} v_r$
 方向 $\sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad}$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

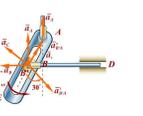
已知: $AB=60\text{mm}, \theta=30^\circ, v_A=10\sqrt{3}\text{mm/s}, a_A=10\sqrt{3}\text{mm/s}^2, v_B=50\text{mm/s}, a_B=10\text{mm/s}^2$.

求: $\omega_{AE}, \alpha_{AE}, \vec{v}_{B/A}$

沿 $\vec{a}'_{B/A}$ 方向投影 $-a_B \cos 30^\circ = -a_A \sin 30^\circ + a'_{B/A} - a_C$

沿 \vec{a}_C 方向投影 $-a_B \sin 30^\circ = a_A \cos 30^\circ + a'_{B/A} + a_C$

解之
 $a_C = -65\text{mm/s}^2$
 $\alpha_{AE} = \frac{a'_{B/A}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{rad/s}^2$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

两种运动分析方法的选择

本章主要介绍平面图形上点的运动分析的两种方法:
 1. 运动方程求导法;
 2. 矢量方程解法.

第1种方法描述了点的连续运动过程(轨迹、速度和加速度), 适合于计算机分析. 但我们所介绍的方法, 基于求解时需因问题而异, 编制适用于各种情形的计算机通用程序仍然难度很大. 对于多刚体系统, 已有相应计算机程序可供选用.

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

结论与讨论

两种运动分析方法的选择

第2种方法有利于初学者加深对刚体运动复合等一系列基本概念的理解, 它能满足本课程的基本要求.

关于求平面图形上某点速度: 基点法、速度投影定理法和瞬时法均需熟练掌握.

至于求平面图形上某点加速度, 我们只介绍了基点法, 当然也要求熟练掌握.

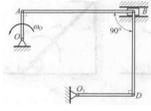
所谓基点法, 实质上是点的复合运动的具体应用. 不过此时动系为随基点的平移, 而相对运动为以基点为圆心的圆周运动.

求加速度时不要用速度瞬心作为基点, 因为虽然瞬心速度为零, 但其加速度一般均不为零, 属未知量.

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



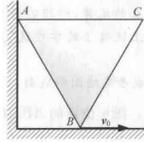
图 8-6 所示机构中,已知各杆长 $OA=l_1, AB=l_2, BD=l_3, OD=l_4$, 角速度 ω_1 已知, 求机构在图示位置时,杆 BD 的角速度, O, D 的角速度及 BD 中点 M 的速度。



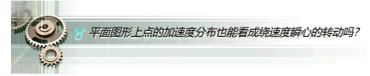
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



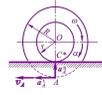
图 8-10 所示的三角板在滑动过程中,其顶点 A 和 B 分别与竖直墙面和水平地面保持接触, 已知 $AB=BC=AC=b, v_B=v_0$ 为常数, 在图示位置, AC 水平, 求此时顶点 C 的加速度。



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



平面图形上点的加速度分布也能看成绕速度瞬心的转动吗?



半径各为 R 和 r 的圆柱体相互固结, 小圆柱体在水平地面上作纯滚动, 其角速度为 ω , 角加速度为 α , 关于大圆柱体上 A 点的绝对速度、绝对切向加速度和绝对法向加速度大小有如下答案:

$$v_A = (R-r)\omega$$

$$a_A^t = (R-r)\alpha$$

$$a_A^n = (R-r)\omega^2$$

试判断这一答案是否正确?

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第3篇 工程动力学



舰载飞机在发动机和弹射器推力作用下从甲板上起飞

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第3篇 工程动力学



舰载飞机在发动机和弹射器推力作用下从甲板上起飞

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第3篇 工程动力学



舰载飞机在发动机和弹射器推力作用下从甲板上起飞



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第3篇 工程动力学



若已知推力和跑道可能长度，则需要多大的初速度和一定的时间间隔后才能达到飞离甲板时的速度。

若已知初速度，一定的时间间隔后飞离甲板时的速度，则需要弹射器施加多大推力，或者确定需要多长的跑道。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第3篇 工程动力学



棒球在被球棒击打后，其速度的大小和方向发生了变化。如果已知这种变化即可确定球与棒的相互作用力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第3篇 工程动力学



棒球在被球棒击打后，其速度的大小和方向发生了变化。如果已知这种变化即可确定球与棒的相互作用力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第3篇 工程动力学



高速列车的振动问题

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第3篇 工程动力学

动力学：研究物体的机械运动与作用力之间的关系。

➢ 工程动力学主要研究两类问题，一类是：已知物体的运动，确定作用在物体上的力；另一类是：已知作用在物体上的力，确定物体的运动。实际工程问题中多以这两类问题的交叉形式出现。总之，工程动力学研究作用在物体上的力系与物体运动的关系。

➢ 研究作用在物体上的力系与物体运动的关系，主要是建立运动物体的力学模型，亦即建立描述受力物体运动状态变化的数学方程，称为动力学问题的基本方程和普遍定理。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第3篇 工程动力学

工程动力学研究对象是质点和质点系（包括刚体），一般分为质点动力学和质点系动力学，前者是后者的基础。

动力学抽象模型

质点：具有一定质量而几何形状和尺寸大小可忽略不计的物体。

➔ 质点动力学

质点系：由几个或无数个相互有联系的质点组成的系统。

➔ 质点系动力学

刚体：特殊质点系，其中任意两点之间的距离保持不变。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第8章 质点动力学

质点动力学(dynamics of a particle)研究作用在质点上的力和质点运动之间的关系。本章主要介绍质点在惯性系下的运动微分方程。

$$F=ma$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§8.1 动力学基本定律

第一定律 (惯性定律)
不受力作用的质点, 将保持静止或作匀速直线运动。

第二定律 (力与加速度之间关系定律)

$$m\ddot{a} = \vec{F}$$

力的单位(牛顿) $1N = 1kg \times 1m/s^2$

第三定律 (作用与反作用定律)
两个物体间的作用力与反作用力总是大小相等, 方向相反, 沿着同一直线且分别作用在这两个物体上。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§8.2 质点运动微分方程

牛顿第二定律——质点的动量对时间的一阶导数等于作用在质点上力系的合力。

$$\frac{d}{dt}(mv) = \sum F$$

当质点的质量为常量时

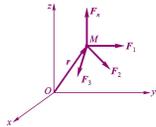
$$m a = \sum F_i$$

质点的质量与质点加速度的乘积等于作用在质点上力系的合力。

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad \text{或} \quad m \frac{d^2r}{dt^2} = F$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§8.2 质点运动微分方程



设有质点M, 其质量为m, 作用其上的力为 F_1, F_2, \dots, F_n , 合力为 F , 根据牛顿第二定律, 质点在惯性系中的运动微分方程有以下四种形式:

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§8.2 质点运动微分方程

1. 矢量形式

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}_i$$

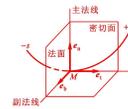
2. 直角坐标形式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_z$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§8.2 质点运动微分方程

3. 自然坐标形式



$$m \frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{i\tau} = ma_\tau$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^n F_{in} = ma_n$$

$$0 = \sum_{i=1}^n F_{i\beta}$$

a_τ 和 a_n 分别为质点的切向加速度和法向加速度
 ρ 为运动轨迹的曲率半径;
 F_x, F_y, F_z 分别为作用在质点上的力, 在自然坐标轴上的分量。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§8.2 质点运动微分方程

应用矢量形式的微分方程进行理论分析非常方便, 但求解一些具体问题却很困难, 而且所得到的解的物理意义也不很明显。因此, 多数问题的求解仍需要根据具体问题, 选择其它合适坐标系。

直角坐标形式的运动微分方程, 原则上适用于所有问题, 但对某些问题, 仍有不方便之处。例如, 如果质点沿球面或柱面运动, 用直角坐标就不如用球坐标或柱坐标方便。

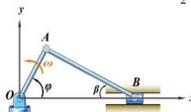
除了以上几种常用的质点运动微分方程外, 根据质点的运动特点, 还可以选择柱坐标、球坐标等形式的运动微分方程。正确分析运动特点, 选择一组合适的微分方程, 会使求解问题的过程大为简化。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-1 曲柄连杆机构如图所示曲柄OA以匀角速度 ω 转动 $OA=r, AB=l$ 当 $\lambda = r/l$ 比较小时以O为坐标原点, 滑块B质量为m, 运动方程可近似写为

$$x = l \left(1 - \frac{\lambda^2}{4} \right) + r \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right)$$

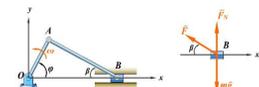
忽略摩擦及连杆AB的质量, 求当 $\varphi = \omega t = 0$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 时, 连杆受力A



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$\omega = \text{常量}, OA=r, AB=l, m$. 设 $\lambda = r/l \ll 1$
 $x = \left(1 - \frac{\lambda^2}{4} \right) l + r \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right)$

求 $\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$ 时杆AB受力 $F = ?$



解滑块

$$ma_x = -F \cos \beta$$

$$\text{其中 } a_x = \ddot{x} = -r\omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t)$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$\omega = \text{常量}, OA = r, AB = l, m$. 设 $\lambda = \frac{l}{r} \ll 1$

$$x = \left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) r \cos \omega t + \frac{\lambda}{4} r \cos 2\omega t$$

求 $\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$ 时杆 AB 受力 $F = ?$

解法快

$$a_x = \ddot{x} = -r\omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t)$$

当 $\varphi = 0$ 时, $a_x = -r\omega^2 (1 + \lambda)$, 且 $\beta = 0$

得 $F = m r \omega^2 (1 + \lambda)$

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $a_x = r\omega^2 \lambda$ 且 $\cos \beta = \sqrt{l^2 - r^2} / l$

有 $m r \omega^2 \lambda = -F \sqrt{l^2 - r^2} / l$ 得 $F = -m r^2 \omega^2 \sqrt{l^2 - r^2}$

动力学第一类问题。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-2 质量为 m 的质点带有电荷 q 以速度 v_0 进入强度按 $E = A \cos kt$ 变化的均匀电场中初速度方向与电场强度垂直如图示。质点在电场中受力 $\vec{F} = -e\vec{E}$ 作用。已知常数 A, k 忽略质点的重力试求质点的运动轨迹。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$m, \vec{v}_0, E = A \cos kt, \vec{v}_0 \perp \vec{E}, \vec{F} = -e\vec{E}$, 不计重力

求质点的运动轨迹。

解: $m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} = 0, m \frac{d^2 y}{dt^2} = m \frac{dv_y}{dt} = -eA \cos kt$

由 $t = 0$ 时 $v_x = v_0, v_y = 0,$

积分 $\int_0^{v_y} dv_y = -\frac{eA}{m} \int_0^t \cos kt dt$

得 $v_x = \frac{dx}{dt} = v_0, v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{eA}{mk} \sin kt$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$m, \vec{v}_0, E = A \cos kt, \vec{v}_0 \perp \vec{E}, \vec{F} = -e\vec{E}$, 不计重力

求质点的运动轨迹。

得 $v_x = \frac{dx}{dt} = v_0, v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{eA}{mk} \sin kt$

由 $t = 0$ 时 $x = y = 0$, 积分

$$\int_0^x dx = \int_0^{v_x} v_x dt, \int_0^y dy = -\frac{eA}{mk} \int_0^t \sin kt dt$$

得运动方程 $x = v_0 t, y = \frac{eA}{mk^2} (\cos kt - 1)$

消去 t 得轨迹方程 $y = \frac{eA}{mk^2} \left[\cos \left(\frac{k}{v_0} x \right) - 1 \right]$

动力学第二类问题。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

质点动力学问题思路

1. 确定研究对象, 选择适当的坐标系;
2. 进行受力分析, 画出相应的受力图;
3. 进行运动分析, 计算出求解问题所需的运动量;
4. 列出质点动力学的运动微分方程, 分清第一类问题还是第二类问题, 分别用微分或积分法求解;
5. 根据需要对结果进行必要的分析讨论。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-3 在倾角为 θ 的粗糙斜面上放一质量为 m_1 的物块 A, 物块上系一绳, 绳与斜面平行, 绕过滑轮后, 在另一端悬挂一质量为 m_2 的物块 B, 物块 A 与斜面间的摩擦系数为 μ 。求物块 A 沿斜面向上的加速度。假设绳子是不可伸长的; 绳子的质量不计, 滑轮的质量及滑轮轴的摩擦也不计。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解: 分别考察物块 A、B, 物块 A 沿斜面加速向上, 物块 B 加速向下, 物块 A、B 均为刚体, 由于均做平动, 故可抽象成质点, 因此可用质点运动微分方程求解。

物块 A 受力如图, 动力学方程 $m_1 a_A = F_T - F_G \sin \theta, 0 = F_N - m_1 g \cos \theta$

物块 B 受力如图, 其动力学方程为 $m_2 a_B = m_2 g - F_T'$

$$a_B = a_A, F_T' = F_T, F = F_N, a_A - a_B = \frac{m_2 - m_1 (\sin \theta + f \cos \theta)}{m_1 + m_2} g$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-4 空气阻力不计, 在地面上以速度 v_0 铅直向上射出一个物体, 设地球引力与物体到地心距离的平方成反比, 求物体可能达到的最大高度。地球半径 = 6370 km。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-4 空气阻力不计, 在地面上以速度 v_0 铅直向上射出一个物体, 设地球引力与物体到地心距离的平方成反比, 求物体可能达到的最大高度。地球半径 = 6370 km。

解: 以地面上发射物体处为坐标原点 A 轴铅直向上, 如图所示。物体射出后, 在运动过程中的任一位置, 仅受到地球引力作用

$$F = \frac{G m_e m}{(R + x)^2}$$

其中 G 是引力常数, m_e 是地球的质量, m 是射出物体的质量, x 是物体与地面的距离。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$F = \frac{Gm_1m_2}{(R+x)^2}$

当物体在地面上时, $x=0$, 而 $F=mg$, 有 $mg = \frac{Gm_1m_2}{R^2}$

因而 $Gm_1 = gR^2$, 有

$$F = mg \frac{R^2}{(R+x)^2}$$

在航天力学中研究地球引力的作用时常用到这个式子。物体的运动微分方程

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -F = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$\frac{dv}{dt} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}$ $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$

$v \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}$ $v dv = -\frac{gR^2}{(R+x)^2} dx$

$t=0$ 时, $v=v_0, x=0$ $\int_{v_0}^v v dv = \int_0^x -\frac{gR^2}{(R+x)^2} dx$

$$v^2 = v_0^2 - 2gR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+x} \right)$$

物体到达最高点时, $x=x_{max}, v=0$ $x_{max} = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-4

$x_{max} = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}$

要使物体不受地球引力作用, 必须使 $x_{max} \rightarrow \infty$, 有 $2gR - v_0^2 = 0$

$$v_0 = \sqrt{2gR}$$

将 $g=9.8 \text{ m/s}^2=9.8 \times 10^3 \text{ km/s}^2$ 以及 $R=6370 \text{ km}$ 代入上式, 得 $v_0=11.2 \text{ km/s}$

发射速度达到 11.2 km/s 物体就将脱离地球引力的影响, 这一速度称为逃逸速度或第二宇宙速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-5 圆锥摆如图所示。质量 $m=0.1\text{kg}$ 的小球系于长 $l=0.3\text{m}$ 的绳上绳的另一端系在固定点O并与铅直线成 $\theta=60^\circ$ 角。如小球在水平面内作匀速圆周运动, 求小球的速度与绳的张力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$m=0.1\text{kg}, l=0.3\text{m}, \theta=60^\circ$ 匀速 求 v, F

解: 研究小球, $m \frac{v^2}{b} = F \sin \theta$

$$F \cos \theta - mg = 0$$

其中 $b = l \sin \theta$

解得 $F = \frac{mg}{\cos \theta} = 1.96\text{N}$

$$v = \sqrt{\frac{F l \sin^3 \theta}{m}} = 2.1 \text{ m/s}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-6 粉碎机滚筒半径为 R , 绕通过中心的水平轴匀速转动, 筒内铁球由筒壁上的凸棱带着上升, 为了使小球获得粉碎矿石的能量, 铁球应在 $\theta = \theta_0$ 时才掉下来。求滚筒每分钟的转数 n 。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

已知匀速转动, $\theta = \theta_0$ 时小球掉下。求转数 n 。

解: 研究铁球 $m \frac{v^2}{R} = F_N + mg \cos \theta$

其中 $v = \frac{\pi n R}{30}$

当 $\theta = \theta_0$ 时, $F_N = 0$, 解得

$$n = 9.549 \sqrt{\frac{R}{g} \cos \theta_0}$$

当 $n \geq 9.49 \sqrt{\frac{R}{g}}$ 时, 球不脱离筒壁。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-7 单摆由一无重量细杆和固结在细杆一端的重球组成。杆长为 $l=1\text{m}$, 球质量为 m 。

1. 单摆的运动微分方程;
2. 在小摆动的假设下分析摆的运动;
3. 在运动已知的情形下求杆对球的约束力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-7 单摆 $OA=l$, 球质量为 m 。

1. 单摆的运动微分方程;
2. 在小摆动的假设下分析摆的运动;
3. 在运动已知的情形下求杆对球的约束力。

解: 1. 单摆的运动微分方程为已知力求运动, 属于第二类动力学问题。质点的运动轨迹为圆弧, 故采用自然坐标形式的运动微分方程

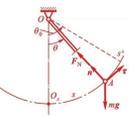
$$s = l\theta, \dot{s} = l\dot{\theta}, \ddot{s} = l\ddot{\theta}$$

$$\begin{cases} m\ddot{s} = \sum F_{\tau} \\ m\dot{s}^2 = \sum F_n \\ \sigma = \sum F_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{s} = -mg \sin \theta \\ m\dot{s}^2 = F_n - mg \cos \theta \\ \sigma = F_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} + \sin \theta = 0 \\ F_n = mg \cos \theta + m\dot{\theta}^2 l \\ F_r = -mg \cos \theta + m\dot{\theta}^2 l \end{cases}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-7 单摆OA=l, 球质量为m

1. 单摆的运动微分方程;
2. 在小摆动的假设下分析摆的运动;
3. 在运动已知的情形下求杆对球的约束力。



解: 1. 单摆的运动微分方程:

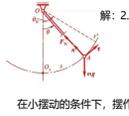
$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0 \\ F_x &= mg \cos \theta + m \frac{v^2}{l} \end{aligned} \right\}$$

其中第一式描述了系统的运动, 也就是所要求的单摆运动微分方程; 第二式给出了杆对球约束力的表达式。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-7 单摆OA=l, 球质量为m

1. 单摆的运动微分方程;
2. 在小摆动的假设下分析摆的运动;
3. 在运动已知的情形下求杆对球的约束力。



解: 2. 分析小摆动条件下, 摆的运动

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0 \\ F_x &= mg \cos \theta + m \frac{v^2}{l} \end{aligned} \right\}$$

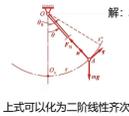
在小摆动的条件下, 摆作微幅摆动: $\sin \theta = \theta$

于是, 上式中的第二式变为 $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-7 单摆OA=l, 球质量为m

1. 单摆的运动微分方程;
2. 在小摆动的假设下分析摆的运动;
3. 在运动已知的情形下求杆对球的约束力。



解: 2. 分析小摆动条件下, 摆的运动

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta &= 0 \\ \omega_c &= \sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned} \right\}$$

上式可以化为二阶线性齐次微分方程的标准形式 $\ddot{\theta} + \omega_c^2 \theta = 0$

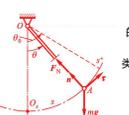
其通解为 $\theta = A \sin(\omega_c t + \varphi)$

其中常数A和 φ 由初始条件决定。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-7 单摆OA=l, 球质量为m

1. 单摆的运动微分方程;
2. 在小摆动的假设下分析摆的运动;
3. 在运动已知的情形下求杆对球的约束力。



解: 3. 在运动已知的情形下求杆对球的约束力:

现在是已知运动, 要求力, 属于第一类动力学问题。

根据已经得到的单摆运动微分方程

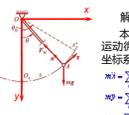
$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0 \\ F_x &= mg \cos \theta + m \frac{v^2}{l} \end{aligned} \right\}$$

$$v^2 = l^2 \dot{\theta}^2 = l^2 \dot{\theta}^2 \quad F_x = mg \cos \theta + m \frac{l \dot{\theta}^2}{l}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例8-7 单摆OA=l, 球质量为m

1. 单摆的运动微分方程;
2. 在小摆动的假设下分析摆的运动;
3. 在运动已知的情形下求杆对球的约束力。



解: 4. 讨论:

本例如果采用直角坐标形式建立运动微分方程, 建立如图所示的直角坐标系,

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum F_x \\ m\ddot{y} &= \sum F_y \\ m\ddot{\theta} &= \sum M_C \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_x \sin \theta \\ m\ddot{y} &= mg - F_x \cos \theta \end{aligned}$$

其中x、y、 θ 三个变量相互不独立, 所以需要建立 y、 θ 三个变量之间的关系, 因而会给出求解方程带来困难。也就是说上述方程虽然是正确的, 但解题过程不方便。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§9.3 质心运动定理及其守恒形式

一、质心运动定理

二、质心运动定理的守恒形式

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§9.2 质心运动定理及其守恒形式

一、质心运动定理

质心运动定理(theorem of the motion of the center of mass)是质点系动量定理的另一种形式。

$$p = m v_c = \sum_i m_i v_i \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dt} = \sum_i F_i^* = F_c^*$$

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv_c}{dt} \rightarrow \sum_i F_i^* = F_c^* \quad \rightarrow \quad \frac{dv_c}{dt} = a_c$$

$$m a_c = \sum_i F_i^*$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、质心运动定理

质心运动定理: 质点系的总质量与质心加速度的乘积等于作用在质点系上外力的矢量和。

$$m a_c = \sum_i F_i^*$$

直角坐标系中质心运动定理的投影式为:

$$\left. \begin{aligned} m x_c \ddot{x}_c &= \sum_i F_{ix}^* \\ m y_c \ddot{y}_c &= \sum_i F_{iy}^* \\ m z_c \ddot{z}_c &= \sum_i F_{iz}^* \end{aligned} \right\}$$

x_c, y_c, z_c ——质心加速度在直角坐标轴上的投影。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、质心运动定理守恒形式

$$m a_c = \sum_i F_i^*$$

根据上述方程, 如果作用于质点系上的外力主矢恒等于零, 则有

$$F_c^* = \sum_i F_i^* = 0 \quad \rightarrow \quad a_c = 0 \quad \rightarrow \quad v_c = C$$

这表明: 质点系的质心作匀速直线运动。如果系统初始为静止状态, $v_c = 0$, 则质心的位矢为常矢量 $r_c = C_1$, 质心位置保持不变, 即质心守恒。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、质心运动定理守恒形式

$$\begin{cases} m\dot{v}_{Cx} = \sum F_{ix} \\ m\dot{v}_{Cy} = \sum F_{iy} \\ m\dot{v}_{Cz} = \sum F_{iz} \end{cases}$$

根据上述方程, 如果外力主矢在某一坐标轴(例如x轴)上的投影为零,

$$F_{ix} = \sum F_{ix} = 0 \rightarrow a_{Cx} = 0 \rightarrow v_{Cx} = C_1$$

这就是质心运动守恒定律。这一定律表明: 质心速度在某一坐标轴(例如x轴)上的投影为常量。如果质心初始为静止状态, 即 $v_{Cx} = 0$ 则质心在轴上的坐标保持不变。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例9.9

电动机的外壳和定子的总质量为 m_1 , 质心 O_1 与转子转轴 O 重合; 转子质量为 m_2 , 质心 O_2 与转轴不重合, 偏心距 $O_1O_2 = e$ 。若转子以等角速度 ω 旋转

求: 电动机底座所受的水平和铅垂约束力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

外壳和定子总质量 m_1 ; 转子质量 m_2 , 偏心距 $O_1O_2 = e$ 。转子等角速度 ω 旋转, 求: 底座所受水平和铅垂约束力。

解: 1. 选择包括外壳、定子、转子的电动机作为研究对象。
2. 系统所受的外力: 定子所受重力 m_1g , 转子所受重力 m_2g , 底座所受约束力 F_x, F_y, M

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

外壳和定子总质量 m_1 ; 转子质量 m_2 , 偏心距 $O_1O_2 = e$ 。转子等角速度 ω 旋转, 求: 底座所受水平和铅垂约束力。

2. 系统所受的外力
定子所受重力 m_1g
转子所受重力 m_2g
底座所受约束力 F_x, F_y, M

3. 各刚体质心的加速度
 $a_{O1} = a_{O1} = 0$;
 $a_{O2} = a_{O2} = e\omega^2$
(向心加速度)

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

外壳和定子总质量 m_1 ; 转子质量 m_2 , 偏心距 $O_1O_2 = e$ 。转子等角速度 ω 旋转, 求: 底座所受水平和铅垂约束力。

3. 各刚体质心的加速度
 $a_{O1} = a_{O1} = 0$;
 $a_{O2} = a_{O2} = e\omega^2$
(向心加速度)

4. 应用质心运动定理
 $\sum m_i a_{ix} = F_{ix}$
 $m_1 \times 0 - m_2 \times e\omega^2 \cos \alpha = F_x$
 $\sum m_i a_{iy} = F_{iy}$
 $m_1 \times 0 - m_2 \times e\omega^2 \sin \alpha = F_y - m_1g - m_2g$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

外壳和定子总质量 m_1 ; 转子质量 m_2 , 偏心距 $O_1O_2 = e$ 。转子等角速度 ω 旋转, 求: 底座所受水平和铅垂约束力。

$$m_1 \times 0 - m_2 \times e\omega^2 \cos \alpha = F_x$$

$$m_1 \times 0 - m_2 \times e\omega^2 \sin \alpha = F_y - m_1g - m_2g$$

$$F_x = -m_2 \times e\omega^2 \cos \alpha$$

$$F_y = m_1g + m_2g - m_2e\omega^2 \sin \alpha$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

外壳和定子总质量 m_1 ; 转子质量 m_2 , 偏心距 $O_1O_2 = e$ 。转子等角速度 ω 旋转, 求: 底座所受水平和铅垂约束力。

5. 关于计算结果的分析

$$F_x = -m_2 \times e\omega^2 \cos \alpha$$

$$F_y = m_1g + m_2g - m_2e\omega^2 \sin \alpha$$

- 动约束力与轴承载动力
 $F_{yA} = -m_2e\omega^2 \cos \alpha t$
 $F_{xA} = -m_2e\omega^2 \sin \alpha t$
- 约束力何时取最大值与最小值
- 周期性反变化化的约束力对结构的破坏作用

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§9.3 质心运动定理及其守恒形式

- 一、质心运动定理
- 二、质心运动定理的守恒形式

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§9.2 质心运动定理及其守恒形式

一、质心运动定理

质心运动定理(theorem of the motion of the center of mass)是质点系动量定理的另一种形式。

$$p = mv_c = \sum_i m_i v_i \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dt} = \sum_i F_i^e = F_c^e$$

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv_c}{dt} = \sum_i F_i^e = F_c^e \quad \rightarrow \quad \frac{dv_c}{dt} = a_c$$

$$m a_c = \sum_i F_i^e$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、质心运动定理

质心运动定理 质点系的总质量与质心加速度的乘积等于作用在质点系上外力的矢量和。

$$m a_c = \sum_i F_i^e$$

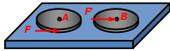
直角坐标系中质心运动定理的投影式为：

$$\left. \begin{aligned} m x_c &= \sum_i F_{ix}^e \\ m y_c &= \sum_i F_{iy}^e \\ m z_c &= \sum_i F_{iz}^e \end{aligned} \right\}$$

x_c, y_c, z_c ——质心加速度在直角坐标轴上的投影。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、质心运动定理



两个相同的均质圆盘，放在光滑水平面上。在圆盘的不同位置上，各作用一水平力 F ，使圆盘由静止开始运动，该 $=F$ ，试问哪个圆盘的质心运动得快？

- (A) A盘质心运动得快
- (B) B盘质心运动得快
- (C) 两盘质心运动相同
- (D) 无法判断

四种答案中哪一个正确的？

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、质心运动定理守恒形式

$$m a_c = \sum_i F_i^e$$

根据上述方程，如果作用于质点系上的外力矢恒等于零，则有

$$F_c^e = \sum_i F_i^e = 0 \quad \rightarrow \quad a_c = 0 \quad \rightarrow \quad v_c = C$$

这表明：质点系的质心作匀速直线运动。如果系统初始为静止状态， $v_c = 0$ ，则质心的位矢为常矢量 $r_c = C_1$ ，质心位置保持不变，即质心守恒。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、质心运动定理守恒形式

$$\left. \begin{aligned} m x_c &= \sum_i F_{ix}^e \\ m y_c &= \sum_i F_{iy}^e \\ m z_c &= \sum_i F_{iz}^e \end{aligned} \right\}$$

根据上述方程，如果外力矢恒在某一坐标轴（例如 x 轴）上的投影为零，

$$F_{cx} = \sum_i F_{ix}^e = 0 \quad \rightarrow \quad a_{cx} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{cx} = C_2$$

这就是质心运动守恒定律。这一定律表明：质心速度在某一坐标轴（例如 x 轴）上的投影为常量。如果质心初始为静止状态，即 $v_{cx} = 0$ ，则质心在 x 轴上的坐标保持不变。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例9.9

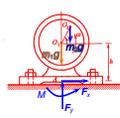
电动机的外壳和定子的总质量为 m_1 ，质心 O_1 与转子转轴 O_2 重合；转子质量为 m_2 ，质心 O_2 与转轴不重合，偏心距 $O_1O_2 = e$ 。若转子以等角速度 ω 旋转



求：电动机底座所受的水平和铅垂约束力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

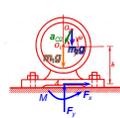
外壳和定子总质量 m_1 ；转子质量 m_2 ，偏心距 $O_1O_2 = e$ 。转子等角速度 ω 旋转，求：底座所受水平和铅垂约束力。



- 解：1. 选择包括外壳、定子的电动机作为研究对象。
2. 系统所受的外力：
 定子所受重力 m_1g
 转子所受重力 m_2g
 底座所受约束力 F_x, F_y, M

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

外壳和定子总质量 m_1 ；转子质量 m_2 ，偏心距 $O_1O_2 = e$ 。转子等角速度 ω 旋转，求：底座所受水平和铅垂约束力。



2. 系统所受的外力：
 定子所受重力 m_1g
 转子所受重力 m_2g
 底座所受约束力 F_x, F_y, M
3. 各刚体质心的加速度
 $a_{O1} = a_{O1} = 0$
 $a_{O2} = a_{O2} = e\omega^2$
 (向心加速度)

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

外壳和定子总质量 m_1 ；转子质量 m_2 ，偏心距 $O_1O_2 = e$ ，转子等角速度 ω 旋转，求：底座所受水平和铅垂约束力。

3. 各刚体质心的加速度

$$a_{O_1} = a_{O_2} = 0;$$

$$a_G = a_{O_2} = e\omega^2$$

(向心加速度)

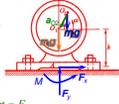
4. 应用质心运动定理

$$\sum m_i a_{iG} = F_{kx},$$

$$m_1 \times 0 - m_2 \times e\omega^2 \cos \alpha t = F_x,$$

$$\sum m_i a_{iG} = F_{ky},$$

$$m_1 \times 0 - m_2 \times e\omega^2 \sin \alpha t = F_y - m_1 g - m_2 g$$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

外壳和定子总质量 m_1 ；转子质量 m_2 ，偏心距 $O_1O_2 = e$ ，转子等角速度 ω 旋转，求：底座所受水平和铅垂约束力。

$$m_1 \times 0 - m_2 \times e\omega^2 \cos \alpha t = F_x,$$

$$m_1 \times 0 - m_2 \times e\omega^2 \sin \alpha t = F_y - m_1 g - m_2 g$$



$$F_x = -m_2 \times e\omega^2 \cos \alpha t$$

$$F_y = m_1 g + m_2 g - m_2 e\omega^2 \sin \alpha t$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

外壳和定子总质量 m_1 ；转子质量 m_2 ，偏心距 $O_1O_2 = e$ ，转子等角速度 ω 旋转，求：底座所受水平和铅垂约束力。

5. 关于计算结果的分析

$$F_x = -m_2 \times e\omega^2 \cos \alpha t$$

$$F_y = m_1 g + m_2 g - m_2 e\omega^2 \sin \alpha t$$

动约束力与轴承载反力

$$F_{x\max} = -m_2 e\omega^2 \cos \alpha t$$

$$F_{y\max} = -m_2 e\omega^2 \sin \alpha t$$

约束力何时取最大值与最小值

周期性反复变化的约束力对结构的破坏作用

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第10章 动量矩定理及其应用

- 质点与刚体的动量矩
- 动量矩定理及其守恒形式
- 相对质心的动量矩定理
- 刚体定轴转动微分方程与平面运动微分方程

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

几个实际问题



跳远运动员怎样使身体在空中不发生转动



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

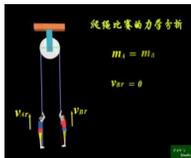
几个实际问题



动物高速奔跑的姿态分析

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

几个实际问题



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 10.1 质点与质点系的动量矩

四. 刚体对轴的转动惯量

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad \text{单位: kg} \cdot \text{m}^2$$

对于质量连续分布的刚体，转动惯量定义式可以写成积分形式：

$$J_z = \int r^2 dm$$

转动惯量定义表明其不仅与质量有关，而且与质量分布有关；同一刚体对不同轴的转动惯量不同，对固定轴的转动惯量是常数；

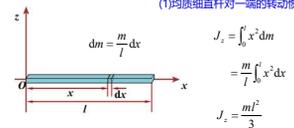
<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四. 刚体对轴的转动惯量

1. 简单形状物体的转动惯量计算

$$J_z = \int r^2 dm$$

(1) 均质细直杆对一端的转动惯量



$$dm = \frac{m}{l} dx$$

$$J_z = \int_0^l x^2 dm$$

$$= \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx$$

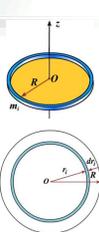
$$J_z = \frac{ml^2}{3}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

1. 简单形状物体的转动惯量计算

(2) 均质薄圆环对中心轴的转动惯量
 $J_z = \sum m_i R^2 = R^2 \sum m_i = mR^2$

(3) 均质圆板对中心轴的转动惯量
 $m_i = 2\pi r_i dr_i \cdot \rho_A$
 式中: $\rho_A = \frac{m}{\pi R^2}$
 $J_o = \int_0^R (2\pi r \rho_A dr \cdot r^2) = 2\pi \rho_A \frac{R^3}{4}$
 或 $J_o = \frac{1}{2} m R^2$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四. 刚体对轴的转动惯量

2. 回转半径 (惯性半径)

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}}$$

回转半径的几何意义: 保持物体对轴的转动惯量不变, 假想将物体的质量集中到一点, 则该点到轴的距离即为回转半径.

则: $J_z = m\rho_z^2$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

四. 刚体对轴的转动惯量

3. 平行轴定理

刚体对于任一轴的转动惯量, 等于刚体对于通过质心并与该轴平行的轴的转动惯量, 加上刚体的质量与两轴间距离平方的乘积.

$$J_z = J_{z_c} + md^2$$

式中 z_c 轴为过质心且与 z 轴平行的轴, d 为 z 与 z_c 轴之间的距离.

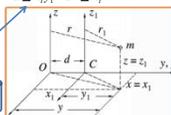


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3. 平行轴定理 $J_z = J_{z_c} + md^2$

证明: $J_{z_c} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$
 $J_z = \sum m_i r^2 = \sum m_i (x^2 + y^2) = \sum m_i [x_i^2 + (y_i + d)^2]$
 $= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) + 2d \sum m_i y_i + d^2 \sum m_i$
 $\sum m_i y_i = 0$
 $\sum m_i y_i = 0$

$J_z = J_{z_c} + md^2$

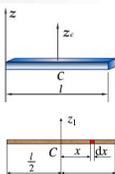


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例10.2: 已知均质细直杆 m, l , 求对过质心的 z 轴的转动惯量.

解: $J_z = \frac{1}{12} ml^2$
 则 $J_{z_c} = J_z - m(\frac{l}{2})^2 = \frac{ml^2}{12}$

均质圆面过质心的转动惯量 $\frac{mR^2}{2}$
 均质细直杆对一端的转动惯量 $\frac{ml^2}{3}$
 均质细直杆对质心的转动惯量 $\frac{ml^2}{12}$

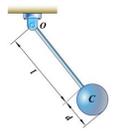


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

4. 组合法

例10.3: 杆长 l , 质量 m_1 , 圆盘半径为 d , 质量为 m_2 , 求 J_o .

解: $J_o = J_{OH} + J_{O2}$
 $J_{OH} = \frac{1}{3} m_1 l^2$
 $J_{O2} = \frac{1}{2} m_2 (\frac{d}{2})^2 + m_2 (l + \frac{d}{2})^2$
 $= m_2 (\frac{3}{8} d^2 + l^2 + ld)$
 $J_o = \frac{1}{3} m_1 l^2 + m_2 (\frac{3}{8} d^2 + l^2 + ld)$

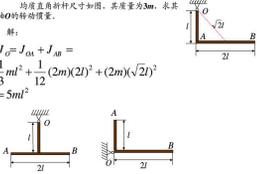


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

4. 组合法

均质直角杆尺寸如图, 其质量为 $3m$, 求其对轴 O 的转动惯量.

解: $J_o = J_{OA} + J_{OB}$
 $= \frac{1}{3} ml^2 + \frac{1}{12} (2m)(2l)^2 + (2m)(\sqrt{2}l)^2$
 $= 5ml^2$

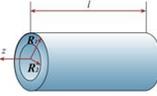


<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例10.4: 已知 m, R_1, R_2 , 求 J_z .

解: $J_z = J_1 - J_2$
 $= \frac{1}{2} m R_1^2 - \frac{1}{2} m R_2^2$

其中 $m_1 = \rho \pi R_1^2 l$
 $m_2 = \rho \pi R_2^2 l$
 $J_z = \frac{1}{2} \rho \pi l (R_1^4 - R_2^4) = \frac{1}{2} \rho \pi l (R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2)$
 由 $\rho \pi l (R_1^2 - R_2^2) = m$, 得 $J_z = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

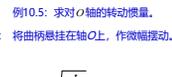
5. 实验法

例10.5: 求对 O 轴的转动惯量.

解: 将曲柄悬挂在轴 O 上, 作微幅摆动.

由 $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg l}}$

其中 m, l 已知, T 可测得, 从而求得 J .



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§10.2 动量矩定理及其守恒形式

一、质点的动量矩定理

设O为定点, 有

$$\frac{d}{dt} \vec{M}_O(m\vec{v}) = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v})$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

其中 $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ (O为定点) $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$ $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$

$$\frac{d}{dt} \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{M}_O(\vec{F})$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、质点的动量矩定理

$$\frac{d}{dt} \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{M}_O(\vec{F})$$

质点的动量矩定理 质点对某定点的动量矩对时间的一阶导数, 等于作用在质点上力对同一点的矩。

投影式

$$\frac{d}{dt} M_x(m\vec{v}) = M_x(\vec{F})$$

$$\frac{d}{dt} M_y(m\vec{v}) = M_y(\vec{F})$$

$$\frac{d}{dt} M_z(m\vec{v}) = M_z(\vec{F})$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、质点系相对固定点的动量矩定理

质点的动量矩定理: $\frac{d}{dt}(\sum r \times m v) = \sum r \times F = M_O$

式中F为作用在质点上的力; M_O 为力对固定点O之矩。

对于质点系中的所有质点, 假设其第*s*个质点所受的內力和外力, 分别用*F_s*和*F_s'*表示, 则有

$$\frac{d}{dt}(\sum (r_s \times m_s v_s)) = \sum r_s \times F_s' - \sum r_s \times F_s$$

将等号两侧对整个质点系中所有质点求和, 得到

$$\sum \frac{d}{dt}(r_s \times m_s v_s) = \sum r_s \times F_s' - \sum r_s \times F_s$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、质点系相对固定点的动量矩定理 (微分形式)

$$\sum \frac{d}{dt}(r_s \times m_s v_s) = \sum r_s \times F_s' - \sum r_s \times F_s$$

微分和求和运算可以互换, 內力必成对出现, 上式可简化为

$$\frac{d}{dt}(\sum r_s \times m_s v_s) = \sum r_s \times F_s'$$

$$\frac{dL_O}{dt} = M_O'$$

这一结果表明, 质点系相对固定点的动量矩对时间的一阶导数等于作用在该质点系上的外力系对同一点的矩, 这就是质点系相对固定点的动量矩定理(theorem of the moment of momentum with respect to a given point)

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、质点系相对固定点的动量矩定理 (积分形式)

$$\frac{d}{dt}(\sum r_s \times m_s v_s) = \sum r_s \times F_s'$$

$$\frac{dL_O}{dt} = M_O'$$

将上述二式积分, 得到

$$\sum r_s \times m_s v_s - \sum r_s \times m_s v_{s0} = \int_0^t \sum r_s \times F_s' dt$$

$$L_{O2} - L_{O1} = \int_0^t M_O' dt$$

质点系动量矩定理的积分形式与冲量定理构成了用于解决碰撞问题的基本定理。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、质点系相对固定点的动量矩定理 (投影形式)

比照力对点之矩与力对轴之矩的关系, 可以得到动量对点之矩在过该点之轴上的投影等于该动量对该轴之矩。

$$\frac{d}{dt}(\sum r_s \times m_s v_s) = \sum r_s \times F_s'$$

$$\frac{dL_O}{dt} = M_O'$$

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x'$$

$$\frac{dL_y}{dt} = M_y'$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z'$$

质点系动量矩定理的投影形式, 也就是质点系相对定轴的动量矩定理

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、质点系相对固定点的动量矩定理 (守恒形式)

$$\frac{dL_O}{dt} = M_O'$$

若外力矩 $M_O' = 0$

则质点系对该点的动量矩为常矢量

$$L_O = C$$

这表明质点系对该点的动量矩守恒

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、质点系相对固定点的动量矩定理 (守恒形式)

当外力对某定轴的矩恒等于零时, 质点系对该轴的动量矩守恒。

例如 $M_x' = 0$

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x'$$

$$\frac{dL_x}{dt} = 0$$

$$L_x = C_1$$

其中*C₁*为常数。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§10.3 相对质心的动量矩定理

在质点系相对惯性参考系中固定点(或固定轴)的动量矩定理中, 动量矩由系统的绝对运动所确定。

工程实际中往往需要研究质点系在任意状态下的动力学问题, 这时需要建立相对任意动点和任意动系的动量矩定理。

这里只讨论质点系相对质心的动量矩定理, 一方面是因为它有广泛的应用价值, 另一方面相对于质点系的质心或通过质心的动轴, 动量矩定理仍保持了简单的形式。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、质点系相对质心的动量矩定理

$$\frac{dL_C}{dt} = \sum_i r_i' \times F_i' = \sum_i M_{C_i}(F_i')$$

质点系相对质心的动量矩定理 theorem of the moment of momentum with respect to the center of mass) 质点系相对质心的动量矩对时间的导数, 等于作用于质点系的外力对质心的主矩在形式上与质点系相对固定点的动量矩定理完全相同。

注意定理中随质心运动的动坐标系是平移坐标系, 定理只适用于质心这一特殊的动点, 对其它动点, 定理将出现附加项。

质心运动定理建立了外力与质心运动的关系;
质点系相对质心的动量矩定理建立了外力与刚体在平移参考系内绕质心转动的关系;

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

\$10.4 刚体定轴转动微分方程与平面运动微分方程

一、刚体定轴转动微分方程

二、刚体平面运动微分方程

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、刚体定轴转动微分方程

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^e \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^e \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^e$$

图示刚体绕定轴转动, 角速度与角加速度分别为 ω 和 α , 刚体上第 i 个质点的质量为 m_i , 到轴的距离为 r_i , 则刚体对定轴的动量矩为

$$L_z = \sum_i m_i r_i \omega = r_i = \sum_i (m_i r_i^2) \omega = J_z \omega$$

$$J_z = \sum_i m_i r_i^2$$

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \alpha = M_z^e = I_z \alpha$$

刚体定轴转动微分方程: 刚体对轴的转动惯量与角加速度的乘积, 等于作用在刚体上的外力系对该轴之矩。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、刚体定轴转动微分方程

例 10.13 如图所示, 已知滑轮半径为 r , 转动惯量为 J , 带动滑轮的皮带拉力分别为 F_1 和 F_2 , 求滑轮的角加速度 α 。

解: 由刚体定轴转动微分方程

$$J\alpha = R(F_1 - F_2)$$

于是得
$$\alpha = \frac{(F_1 - F_2)R}{J}$$

由上式可见, 只要由定滑轮向动滑轮 (包括滑轮) 的皮带各点连续接触, 但可忽略滑轮的转动惯量时, 经过定滑轮的皮带拉力才是相等的。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、刚体定轴转动微分方程

例 10.14

图示钟摆简化模型中, 已知均质细杆和均质圆盘的质量分别为 m_1 、 m_2 , 杆长为 l , 圆盘直径为 d 。

试求: 钟摆作小摆动时的周期。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例 10.14 均质杆 m_1 、圆盘 m_2 、 l 、 d , 求钟摆小摆动周期。

解: 摆绕 C 轴转动。设为任意时刻转过角度 ϕ , 规定逆时针为正, 根据定轴转动的微分方程

$$J_C \ddot{\phi} = M_C$$

分析受力, 建立钟摆的运动微分方程

$$J_C \ddot{\phi} = -m_1 g \frac{l}{2} \sin\phi - m_2 g (l + \frac{d}{2}) \sin\phi$$

$$\ddot{\phi} + \frac{m_1 g \frac{l}{2} + m_2 g (l + \frac{d}{2})}{J_C} \phi = 0$$

$$J_C = \frac{1}{3} m_1 l^2 + m_1 l^2 + m_2 (l + \frac{d}{2})^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_C}{m_1 g \frac{l}{2} + m_2 g (l + \frac{d}{2})}}$$

摆的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_C}{m_1 g \frac{l}{2} + m_2 g (l + \frac{d}{2})}}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例 10.14 均质杆 m_1 、圆盘 m_2 、 l 、 d , 求钟摆小摆动周期。

摆的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_C}{m_1 g \frac{l}{2} + m_2 g (l + \frac{d}{2})}}$$

式中: $J_C = J_O + J_{OC}$

J_O 和 J_{OC} 为杆和圆盘对轴的转动惯量。

$$J_O = \frac{1}{3} m_1 l^2 \quad J_{OC} = J_{OC} + m_2 d_{OC}^2 \quad d_{OC} = l + \frac{d}{2}$$

$$J_{OC} = J_{OC} + m_2 l^2 + \frac{d}{2} \quad J_{OC} = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 + m_2 \left(l + \frac{d}{2}\right)^2$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、刚体定轴转动微分方程

例 10.15

均质圆轮半径为 R , 质量为 m , 圆轮在重物 P 带动下绕固定轴 O 转动, 已知重物重量为 W 。

求: 重物下落的加速度

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例 10.15 已知均质圆轮 m , 圆轮在重物 P 带动下绕固定轴 O 转动, 重物重量为 W , 求: 重物下落的加速度。

解法: 设圆轮角速度和角加速度为 ω 和 α , 重物的加速度为 a_P 。

系统对 O 的轴总动量矩

$$L_O = L_{O1} + L_{O2} = \frac{1}{2} m R^2 \omega + W a_P R$$

应用动量矩定理 $\frac{dL_O}{dt} = M_O^e$

$$\frac{d(\frac{1}{2} m R^2 \omega + W a_P R)}{dt} = W R \quad a_P = R \alpha$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \alpha + W a_P R = W R$$

$$a_P = \frac{2Wg}{mg + 2W}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例10.15 已知均质圆轮 R , m , 圆轮在重物 P 带动下绕固定轴 O 转动, 重物重量为 W . 求: 重物下落的加速度.

解法2:

$$W - T = \frac{W}{g} a$$

$$T = W - \frac{W}{g} a$$

$$-J_c \alpha = M_f = -TR$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \alpha = -WR + \frac{W}{g} a R$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \frac{a}{R} = -WR + \frac{W}{g} a R$$

$$a = \frac{2Wg}{mg + 2W}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例10.16 突然解除约束问题

解除约束前
 $F_x = 0, F_{Oy} = \frac{1}{2} mg$

解除约束后
 $F_x = -l, F_{Oy} = -l$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例10.16 突然解除约束问题

应用质心转动微分方程

$$\frac{1}{3} m l^2 \alpha = mg \times \frac{l}{2}, \alpha = \frac{3g}{2l}$$

应用质心运动定理

$$m \times \frac{1}{2} a^3 = 0 = F_{Oy}$$

$$m \times \frac{1}{2} a = mg - F_{Oy}$$

完全解除约束时, 杆以转轴 O 为轴转动, 不再是静力学问题. 这时, $\omega = 0, a = 0$. 答案先求出 α , 再确定约束力.

$$F_{Oy} = mg - m \times \frac{1}{2} a = \frac{mg}{4}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、刚体平面运动微分方程

将质心运动定理和相对质心动量矩定理应用于刚体平面运动动力学分析. 所用方法与所得的结果不仅对刚体平面运动力学, 而且对现代多刚体系统动力学都有重要意义.

运动学中, 确定作平面运动刚体的位置, 可由基点的位置与刚体绕基点转动的转角确定.

取质心 C 为基点, 其坐标为 x_c, y_c . 设 D 为刚体上任意一点, CD 与 x 轴的夹角为 φ , 则刚体的位置可由 x_c, y_c 和 φ 确定.

将刚体的运动分解为随质心的平移和绕质心的转动两部分. 当刚体具有质量对称面, 且质量对称面平行于运动平面时, 则在固连于质心的平移参考系中, 刚体对质心的动量矩为

$$L_c = J_c \omega$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、刚体平面运动微分方程

当作用于刚体上的力系等价于质量对称面内的一个平面力系时, 对刚体平面运动, 应用质心运动定理和相对质心动量矩定理, 有

$$m a_c = \sum F_i$$

$$\frac{dL_c}{dt} = J_c \alpha = \sum M_c(F_i)$$

如果上述微分方程中有比等号左边的变数有较复杂的指数, 则微分方程中变数系数的平方方程, 需外力函数完全, 全部为等号. 因此, 质心运动定理与动量矩定理, 不但完全确定了刚体一般运动的动力学方程, 而且还完成了对刚体平面运动的特征——平面运动的动力学描述.

$$m a_c = \sum F_i$$

$$m \dot{\omega}_c = \sum F_i$$

$$J_c \dot{\omega} = \sum M_c(F_i)$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例10.17

半径为 r 的均质圆盘从静止开始, 沿倾角为 θ 的斜面无滑动滚下.

试求:

1. 圆轮滚至任意位置时的质心加速度;
2. 圆轮在斜面上不打滑的最小静摩擦因数.

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例10.17 均质圆盘半径为 r 从静止开始沿倾角为 θ 的斜面无滑动滚下. 求: 不打滑的最小静摩擦因数.

解: 分析圆轮受力

1. 确定圆轮质心的加速度

圆轮作平面运动. 根据刚体平面运动微分方程, 有

$$m a_c = mg \sin \theta - F$$

$$0 = mg \cos \theta - F_N$$

$$J_c \alpha = Fr$$

运动学补充关系

$$a_c = r \alpha \quad J_c \alpha = Fr \rightarrow F = J_c \frac{a_c}{r} = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a_c}{r^2} = \frac{1}{2} m a_c$$

$$m a_c = mg \sin \theta - F \rightarrow a_c = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例10.17 均质圆盘半径为 r 从静止开始沿倾角为 θ 的斜面无滑动滚下. 求: a_c 不打滑的最小静摩擦因数.

解: 2. 确定圆轮在斜面上不滑动的最小静摩擦因数

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

$$F = J_c \frac{a_c}{r} = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a_c}{r^2} = \frac{1}{2} m a_c$$

$$F = \frac{1}{3} mg \sin \theta \leq F_s \leq f$$

$$0 = mg \cos \theta - F_N \rightarrow F_N = \frac{2}{3} mg \cos \theta$$

$$f_{max} = \frac{1}{3} \tan \theta$$

此即圆轮在斜面上不滑动的最小静摩擦因数.

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

讨论

如果圆轮可以在斜面上滑动, 本例将如何求解? 补充方程将如何建立?

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例10-19 长 l 、质量为 m 的均质杆 AB 和 BC 用铰链 B 连接，并用铰链 A 固定，位于平衡位置。今在 C 端作用一水平力 F ，求瞬时，杆的角加速度。

解：分别以 A 杆和 BC 为研究对象，受力如图。 AB 和 BC 分别作定轴转动的平面运动，杆 AB 由定轴转动的微分方程

$$\frac{1}{3} ml^2 \alpha_{AB} = F_B l$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

对 BC 由刚体平面运动的微分方程得

$$m a_{Co} = F - F'_{Ba}$$

$$\frac{1}{12} ml^2 \alpha_{BC} = F \frac{l}{2} + F'_{Ba} \frac{l}{2}$$

BC 作平面运动，取 B 为基点，则

$$a_{Co} = a_B + a'_{Co}$$

$$a_B = l \alpha_{AB}, a'_{Co} = \frac{l}{2} \alpha_{BC}, a'_{Co} = 0$$

将以上矢量式投影到水平方向，得

$$a_{Co} = a_B + a'_{Co} = l \alpha_{AB} + \frac{l}{2} \alpha_{BC}$$

联立解得

$$\alpha_{AB} = -\frac{6F}{7ml}, \alpha_{BC} = \frac{30F}{7ml}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例10-20 平板质量为 m_1 ，受水平力 F 作用而沿水平面运动，板与水平面间的动摩擦系数为 f 。平板上放一质量为 m_2 的均质圆柱，它相对平板只滚动不滑动，求平板的加速度。

解：取圆柱为对象，建立如图坐标。

$$m_2 a_{2o} = F_1$$

$$0 = F_{N1} - m_2 g$$

$$\frac{1}{2} m_2 r^2 \alpha = F_1 r$$

于是得：

$$F_{N1} = m_2 g, \alpha = \frac{2F_1}{m_2 r}$$

$$a_o = a - r \alpha = a - \frac{2F_1}{m_2}$$

$$F_1 = \frac{1}{3} m_2 a$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例10-20 平板质量为 m_1 ，受水平力 F 作用而沿水平面运动，板与水平面间的动摩擦系数为 f 。平板上放一质量为 m_2 的均质圆柱，它相对平板只滚动不滑动，求平板的加速度。

取板分析

$$m_1 a = F - F_2 - F'_1$$

$$0 = F_{N2} - m_2 g - F'_{N1} \Rightarrow F_{N2} = (m_1 + m_2) g$$

$$F_2 = f(m_1 + m_2) g$$

$$m_2 a = F - f(m_1 + m_2) g - \frac{1}{3} m_2 a$$

$$a = \frac{F - f(m_1 + m_2) g}{m_1 + \frac{1}{3} m_2}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

结论与讨论

几个需要注意的关系

转动惯量与回转半径

刚体的转动惯量 $J_o = J_c + \sum m_i r_i^2$

刚体对轴的转动惯量还可利用回转半径或惯性半径 (inertial radius) 表示。回转半径 a 与转动惯量 J 的关系为 $J = m a^2$

回转半径的含义是，若将刚体的质量 m 集中在距离 a 为 a 的圆周上，其转动惯量与刚体的转动惯量相等。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第11章 动能定理及其应用

- 动能是物体机械能的一种形式,也是做功的一种能力
- 动能定理描述质点系统动能的变化与力做功之间的关系
- 动量定理、动量矩定理用矢量方程描述,动能定理用标量方程表示。求解实际问题时,往往需要综合应用动量定理、动量矩定理和动能定理。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

第11章 动能定理及其应用

- 功
- 动能
- 动能定理及其应用
- 机械能守恒定律及其应用
- 动力学普遍定理的综合应用

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§11.1 力的功

- 一、概念
- 二、常见力的功

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、概念

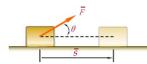
功表征力在其作用点的运动过程中对物体作用的累积效应,其结果是引起物体能量的变化和转化。

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、概念

1. 常力在直线运动中的功



$$W = F \cos \theta \cdot s = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

功是代数量 单位J (焦耳) 1J = 1N·m

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、概念

2. 变力在曲线运动中的功

$$\delta W = F \cos \theta \cdot ds$$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dx \cos(\theta, dx) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

一般情形下,元功并不是功函数的全微分,所以不用W表示元功,而是用δW表示,δW仅仅指F_idr_i的一种记号。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

一、概念

- 力F_i在点的轨迹上从一点M₁到另一点M₂所作的功



$$W_{12} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$3. \text{合力的功} \quad W = \sum W_i$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、常见力的功

1. 重力的功

质点 $F_x = F_y = 0, F_z = -mg$

$$W_{12} = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = mg(z_1 - z_2)$$

质点系

$$\sum W_{12} = \sum m_i g(z_{i1} - z_{i2})$$

由 $mz_c = \sum m_i z_i$ 得 $\sum W_{12} = mg(z_{c1} - z_{c2})$

重力的功只与始、末位置有关,与路径无关。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

二、常见力的功

2. 弹性力的功

弹簧刚度系数(N/m)

弹性力 $\vec{F} = -k(r - l_0)\vec{e}_r$

弹性力的功

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} -k(r - l_0) \delta_r \cdot dr$$

$$\delta_r \cdot dr = \frac{r}{r} dr = \frac{1}{r} d(r \cdot r) = \frac{1}{r} d(r^2) \quad W_{12} = \frac{k}{2} [(r_1 - l_0)^2 - (r_2 - l_0)^2]$$

$$W_{12} = \frac{k}{2} (\delta_1^2 - \delta_2^2)$$

δ₁、δ₂分别为弹簧在初始和最终位置的变形量。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

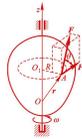
3.作用在刚体上力的功、力偶的功

一般情形下，作用在质点系（刚体系）上的力系（包括内力系）非常复杂，需要认真分析哪些力做功，哪些力不做功。在动量和动量矩定理中，只有外力系起作用，内力不改变系统的动量或动量矩；在能量方法中，内力对系统的能量改变是有影响的，许多内力是做功的，这是学习本章内容时必须注意的。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3.作用在刚体上力的功、力偶的功

■定轴转动刚体上外力的功



刚体以角速度 ω 绕定轴转动其上A点作用力 F ，则力在A点轨迹切线上的投影为
 $F_t = F \cos \theta$
 定轴转动的转角和弧长的关系为 $ds = R d\phi$
 则力 F 的元功为
 $dW = F \cdot dr = F_t R d\phi = M_t(F) d\phi$
 $M_t(F) = F_t R$ **—力对轴的矩**
 于是，力在刚体由角 ϕ_1 转到角 ϕ_2 时所做的功为
 $W_{12} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} M_t(F) d\phi$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3.作用在刚体上力的功、力偶的功

■定轴转动刚体上外力偶的功

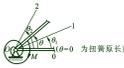
若力偶矩 M 与 ω 轴平行，则 M 所作之功为
 $W_{12} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} M d\phi$
 若力偶矩 M 为任意矢量，则 M 所作之功为
 $W_{12} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} M_n d\phi$
 其中 M_n 为力偶矩 M 在 ω 轴上的投影。

转矩为常量时： $W = M_n \phi$ ，力矩和转角同向一致时功取正值。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3.作用在刚体上力的功、力偶的功

■扭转弹簧力矩的功



假设扭簧上的杆处于水平时扭簧未变形，且变形时在弹性范围之内，变形时扭簧作用于杆上的力对点O之矩为
 $M = -k\theta$

其中 k 为扭簧的刚度系数。当杆从角 ϕ_1 转到角 ϕ_2 时所做的功为

$$W_{12} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} (-k\theta) d\theta = \frac{1}{2} k\theta_1^2 - \frac{1}{2} k\theta_2^2$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

3.作用在刚体上力的功、力偶的功

■内力做功

质点系的内力总是成对出现的，且大小相等、方向相反、作用在一条直线上，因此，质点系内力的矢量和等于零，但不能由此认定内力做功等于零。事实上，在许多情形下，物体的运动是由内力做功而引起的。当然也有有的内力确实不做功。
 日常生活中，人的行走和奔跑是腿的肌肉内力做功；弹簧力做功等等。工程上，所有的发动机从整体考虑，其内力都做功。机器中各相对滑动的两个零件之间的内力做功，在弹性构件中的内力分量（如拉力、剪力、弯矩等）作负功。
 刚体内任何两点间的距离始终保持不变，所以刚体的内力所作功之和恒等于零。
 内力不能改变质点系的动量和动量矩，但它可能改变质点系的能量；外力能改变质点系的动量和动量矩，但不一定能改变其能量。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

4.理想约束

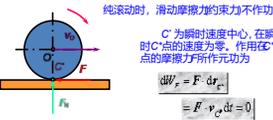
约束力为无功力的约束称为理想约束。光滑的固定支承面、轴承、光滑的活动铰链、销钉和活动支座都是理想约束。它们的约束力不做功或做功之和等于零。
 柔性约束是理想约束，与刚性杆一样，内力做功之和等于零。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

4.动滑动摩擦力的功

动滑动摩擦力的功为负值，与运动路径有关；当法向正压力为常量时（ s 为两质点之间的曲线距离）

$$W = \int_{s_1}^{s_2} (-f F_N) ds = -f F_N s$$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

5.平面运动刚体上力系的功

$$W_i = \vec{r}_C \cdot \vec{v}_C \quad \text{两端乘} t \quad d\vec{r}_i = d\vec{r}_C + d\vec{r}_{iC}$$

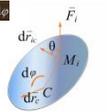
作用在 M_i 点的力 F_i 的元功为：

$$\delta W_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_C + \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_{iC}$$

其中 $\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_{iC} = F_i \cos \theta \cdot MC \cdot d\phi = M_i(\vec{F}_i) d\phi$

力系全部力的元功之和为

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum \delta W_i \\ &= \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_C + \sum M_i(\vec{F}_i) d\phi \\ &= \vec{F}_R \cdot d\vec{r}_C + M_C d\phi \end{aligned}$$



<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

5.平面运动刚体上力系的功

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum \delta W_i \\ &= \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_C + \sum M_i(\vec{F}_i) d\phi = \vec{F}_R \cdot d\vec{r}_C + M_C d\phi \end{aligned}$$

其中 \vec{F}_R 为力系主矢 M_C 为力系对质心的主矩

当质心由 $C_1 \rightarrow C_2$ ，转角由 $\phi_1 \sim \phi_2$ 时，力系的功为

$$W_{12} = \int_{C_1}^{C_2} \vec{F}_R \cdot d\vec{r}_C + \int_{\phi_1}^{\phi_2} M_C d\phi$$

平面运动刚体上力系的功，等于刚体上所受各力元功代数和，也等于力系向质心简化所得的力和力偶元功之和。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

5. 平面运动刚体上力系的功

平面运动刚体上力系的功，等于刚体上所受各力作功代数和，也等于力系向质心简化所得的力和力偶作功。

说明1、对任何运动的刚体上述结论都适用

- C点不是质心而是刚体上任意一点时上述结论也成立
- 计算力系的主矢、主矩时，可以不包含不作功的力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.2 动能

物体由于机械运动而具有的能量称为动能。

物理学中对动能的定义为

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

式中 m 、 v 分别为质点的质量和速度。动能为标量。

质点系的动能为质点系内各质点动能之和，记为

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

动能是度量质点系整体运动的另一物理量，动能是正标量，其数值与速度的大小有关，但与速度的方向无关。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.2 动能

例 11.1

设重物 A、B 的质量为 $m_A = m_B = m$ ，三角楔块的质量为 m_0 ，置于光滑地面上。楔块和楔的质量忽略不计，系统初始静止。

求：当物块以相对速度下落时系统的动能。

解：开始运动后，系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2}m_0 v_0^2$$

$v_A = v_0 + v_{Ax}$ $v_B = v_0 + v_{Bx}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.2 动能

$$T = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2}m_0 v_0^2$$

$v_A = v_0 + v_{Ax}$ $v_B = v_0 + v_{Bx}$

或者写成

$$v_A^2 = v_0^2 + v_{Ax}^2$$

$$v_B^2 = v_0^2 + v_{Bx}^2$$

$$v_0^2 = v_0^2 + v_0^2 - 2v_0 v_0 \cos \alpha = (v_0 - v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha)^2$$

注意系统水平方向上动量守恒，故有

$$m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} + m_0 v_0 \cos \alpha = 0$$

$$\rightarrow m v_0 + m(v_0 - v_0 \cos \alpha) + m_0 v_0 \cos \alpha = 0$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.2 动能

$$T = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2}m_0 v_0^2$$

$$v_A^2 = v_0^2 + v_{Ax}^2$$

$$v_B^2 = v_0^2 + v_{Bx}^2 - 2v_0 v_{Bx} \cos \alpha = (v_0 - v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha)^2$$

$$m_0 v_0 + m(v_0 - v_0 \cos \alpha) + m_0 v_0 \cos \alpha = 0 \rightarrow v_0 = \frac{m_0 \cos \alpha}{2m + m_0}$$

$$T = \frac{1}{2}m(v_0^2 + v_{Ax}^2) + \frac{1}{2}m(v_0^2 + v_{Bx}^2 - 2v_0 v_{Bx} \cos \alpha) + \frac{1}{2}m_0 v_0^2$$

$$= \frac{2m(2m + m_0) - m \cos^2 \alpha}{2(2m + m_0)} v_0^2$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.2 动能

确定系统动能时，注意：

- 系统动能中所用的速度必须是绝对速度。
- 正确应用运动学知识，确定各部分的速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.2 动能 刚体的动能

刚体的动能取决于刚体的运动形式。

1、平移刚体的动能

刚体平移时，其上各点在同一瞬时具有相同的速度，并且都等于质心速度。因此，平移刚体的动能

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}(\sum m_i) v_c^2 = \frac{1}{2}m v_c^2$$

式中 m 为刚体的质量； v_c 为质心的速度。

上述结果表明，刚体平移时的动能，相当于将刚体的质量集中于质心时的动能。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.2 动能 刚体的动能

2、定轴转动刚体的动能

刚体以角速度 ω 绕定轴转动时，其上一点的速度为

$$v_i = r_i \omega$$

因此，定轴转动刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (\sum m_i r_i^2) = \frac{1}{2} J_c \omega^2$$

其中 J_c 为刚体对定轴的转动惯量。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.2 动能 刚体的动能

3、平面运动刚体的动能

刚体的平面运动可分解为随质心的平移和绕质心的相对转动，因此平面运动刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2}m v_c^2 + \frac{1}{2}J_c \omega^2$$

其中 v_c 为刚体质心的速度； ω 为刚体对通过质心且垂直于运动平面的轴的转动惯量。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.2 动能

3. 平面运动刚体的动能

速度瞬心为P

$$T = \frac{1}{2} J_c \omega^2 = \frac{1}{2} (J_c + md^2) \omega^2$$

得 $T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$

平面运动刚体的动能等于随质心平移的动能与绕质心转动的动能之和。
此结论也适用于刚体的任意运动。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.3 动能定理及其应用

一、质点的动能定理

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{两端点乘} \quad \vec{v} d\vec{t} = d\vec{r}$$

得 $m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

由于 $m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d(\frac{1}{2} m v^2)$, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \delta W$

因此 $d(\frac{1}{2} m v^2) = \delta W$

质点动能定理的微分形式: 质点动能的增量等于作用在质点上的元功。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.3 动能定理及其应用

一、质点的动能定理

$$d(\frac{1}{2} m v^2) = \delta W$$

积分: $\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W_{12}$

质点动能定理的积分形式: 在质点运动的某个过程中, 质点动能的改变量等于作用于质点的力元功。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.3 动能定理及其应用

二、质点系的动能定理

质点系动能定理微分形式 $\delta(\frac{1}{2} m v^2) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \delta W$

积分形式 $\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W_{12}$

对于质点系: 质点系动能的微分等于作用在质点系上所有力的元功之和

$$dT = d(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2) = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \delta W_i$$

也可表示为 $\frac{dT}{dt} = \sum_i \frac{\delta W_i}{dt} = \sum_i N_i = N$

N称为力的功率——单位时间内该力所作的功。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.3 动能定理及其应用

二、质点系的动能定理

对于质点系: 质点从某一位置运动到另一位置, 其动能改变量等于运动过程中作用在质点系上的所有可以作功的力所作之元的代数和。

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2 = \sum W_{i1-2}$$

$$T_2 - T_1 = W_{1-2}$$

所有可以作功的力——既包括外力, 也包括内力; 既包括主动力, 也包括约束力。在理论力学系统中, 只包括主动力和内力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§ 11.3 动能定理及其应用

三、动能定理应用

例11-2 已知: m, h, k , 其它质量不计, 求 δ_{max}

解: $T_1 = 0, T_2 = 0$

$$0 - 0 = mg(h + \delta_{max}) - \frac{k}{2} \delta_{max}^2$$

$$\delta_{max} = \frac{mg}{k} + \frac{1}{k} \sqrt{m^2 g^2 + 2kmgh}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

动能定理及其应用

动能定理的应用实例

例11-3

均质圆轮A、B的质量均为m, 半径均为r, 轮A沿斜面作纯滚动, 轮B作定轴转动, B处摩擦不计。物块C的质量也为m, A、B、C用无质量的绳相联, 绳相对轮无滑动, 系统初始为静止状态。

试求:

- 当物块C下降高度为r时, 轮A质心的速度以及轮的角速度。
- 系统运动时, 物块的加速度。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

动能定理及其应用

动能定理的应用实例——例题 11.3

解: 以整个系统为研究对象, 画出系统中作功的力。

- 分析运动确定各部分的速度、角速度。

写出系统的动能表达式:

于是, 系统的动能:

$$T_1 = 0, T_2 = (\frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega_c^2) + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2 + \frac{1}{2} m v_A^2$$

根据运动学分析, 得到

$$v_c = R\omega_c, v_c = R\omega_B, v_A = v_c$$

$$T_1 = 0, T_2 = \frac{3}{2} m v_c^2$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

动能定理及其应用

动能定理的应用实例——例题 11.3

- 确定外力的功: 轮A的重力和物块的重力分别作正功和负功。于是, 系统外力的总功为 $W_{1-2} = mgh - mgh \cos 60^\circ = \frac{1}{2} mgh$
- 应用动能定理的积分形式: $T_2 - T_1 = W_{1-2}, \frac{3}{2} m v_c^2 - 0 = \frac{1}{2} mgh$

由此解出

$$v_c = \frac{gh}{3}, \omega_c = \omega_B = \frac{v_c}{R} = \frac{\sqrt{gh}}{\sqrt{3R}}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

动能定理及其应用
动能定理的应用举例—例题 11.3

4. 确定系统运动时物块C的加速度:
将下降高度视为变量, 某对时间的一阶导数即为物块的速度
因为物块C作直线平移, 故有

$$\frac{dh}{dt} = v_C = v_A$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{dv_A}{dt} = a_C$$

$$v_C = \frac{dh}{dt} = \frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{h}{R} v_C$$

$$2v_C a_C = \frac{h}{R} a_C$$

物块的加速度为 $a_C = a_A = \frac{g}{3}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例11.4

已知: 轮O: R_1, m_1 , 质量分布在轮缘上, 均质轮C: R_2, m_2 , 纯滚动, 初始静止; θ, M 为常力偶。
求: 轮心C 走过路程s时的速度和加速度

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解: 轮C与轮O组成的质点系为研究对象

$$W_{12} = M\varphi - m_2 g S \sin \theta$$

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (m_1 R_1^2) \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_2 R_2^2 \right) \omega_2^2$$

$$\omega_1 = \frac{v_C}{R_1}, \omega_2 = \frac{v_C}{R_2}$$

$$W_{12} = T_2 - T_1 \quad M\varphi - m_2 g S \sin \theta = \frac{v_C^2}{4} (2m_1 + 3m_2)$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$$M\varphi - m_2 g S \sin \theta = \frac{v_C^2}{4} (2m_1 + 3m_2)$$

$$\varphi = \frac{S}{R_1} \quad v_C = 2\sqrt{\frac{(M - m_2 g R_1 \sin \theta) S}{R_1 (2m_1 + 3m_2)}}$$

动能定理表达式两端对t求导得

$$\frac{1}{2} (2m_1 + 3m_2) v_C \cdot a_C = M \frac{v_C}{R_1} - m_2 g v_C \sin \theta$$

$$a_C = \frac{2(M - m_2 g R_1 \sin \theta)}{(2m_1 + 3m_2) R_1}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例11.5

已知: 冲击试验机 $m=18\text{kg}, l=840\text{mm}$, 杆重不计, 在 $\varphi_0 = 70^\circ$ 时静止释放, 冲击试件后摆至 $\varphi_1 = 29^\circ$

求: 冲击试件需用的能量。

解: $T_1 = 0, T_2 = 0$

$$0 - 0 = mgl(1 - \cos \varphi_1) - mgl(1 - \cos \varphi_2) - W_k$$

$$mgl(1 - \cos \varphi_2) - W_k$$

得冲击试件需用的能量 $W_k = 78.92\text{J}$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例11.6

已知均质圆盘R, m, F为常量且很大使O向右运动 l 初静止。

求: O 处达瞬程时 ω, α 。

解: 圆盘速度瞬心为C

$$T_1 = 0 \quad v_O = \omega R$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_O^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \omega^2 = \frac{3}{4} m v_O^2$$

$$\sum W = FS - 2mgS$$

$$\sum W = T_2 - T_1$$

$$FS - 2mgS = \frac{3}{4} m v_O^2$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$$FS - 2mgS = \frac{3}{4} m v_O^2$$

$$v_O = 2\sqrt{\frac{S}{3m} (F - 2mg)}$$

将第一式两端对t求导, 并利用 $\alpha = \frac{a_O}{r}$

得 $a_O = \frac{2}{3m} (F - 2mg)$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

例11.7

已知均质杆OB (B=l, m), 在铅垂面内; M=常量, 初始静止, 不计摩擦

求: 当A运动到C点时, $v_A = ?$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

解:

$$\sum W = M\theta - 2mg(1 - \cos \theta) \frac{l}{2}$$

$$v_C = \omega_{AB} C'C = \frac{3}{2} l \omega_{AB}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{l}, \omega_{OB} = \frac{v_B}{l}$$

$$\omega_{AB} = \omega_{OB} \quad v_A = \omega_{AB} 2l$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

$T_1 = 0$

$$T_2 = T_{AB} + T_{OB} = \frac{1}{2} m v_C^2$$

$$+ \frac{1}{2} J_C \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} J_O \omega_{OB}^2 = \frac{4}{3} m l^2 \omega_{AB}^2$$

$$\sum W = T_2 - T_1$$

$$\omega_{AB} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{3}{m} [Ml\theta - mgl(1 - \cos\theta)]}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

§11.4 机械能守恒定律及其应用

- 有势力和势能
- 机械能守恒定律

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

势能的概念 机械能守恒定律及其应用

- 有势力和势能

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

势能的概念 机械能守恒定律及其应用

- 有势力和势能
- 有势力的概念

如果作用在物体上的力所作之功仅与力作用点的起始位置和最终位置有关, 而与其作用点所经过的路径无关, 这种力称为势力或保守力。重力、弹性力等都具有这一特征, 因而都是有势力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

势能的概念 机械能守恒定律及其应用

- 有势力和势能
- 势能

势能是质点系(质点)从某位置(点)运动到任意的零势位置(零势点)时, 有势力所作之功。

承受有势力作用的质点系, 其势能的表达式为

$$V = \int_{r_0}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0}^r (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

其中 r_0 为势能等于零的位置(点), 称为零势位置(零势点); M 为所考虑的任意位置(点)。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

势能的概念 机械能守恒定律及其应用

- 有势力和势能
- 势能

由于零势位置(零势点)可以任选, 所以, 对于同一个所有始位置的势能, 相应零势位置(零势点)的不同而有不同的数值。

为了使分析和计算过程简单、方便, 对零势位置(零势点)要加以适当的选择。例如对常见的弹簧-质点系统, 往往以其静止平衡位置为零势位置, 这样可以使势能的表达式更简洁、明了。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

势能的概念 机械能守恒定律及其应用

- 有势力和势能
- 势能

需要指出的是, 这里的“零势位置(零势点)”与物理学中的“零势点”的关系: 物理学中的零势点是针对质点的, 零势位置则是组成质点系的一个质点的零势点的集合。

例如, 质点系在重力场中的零势位置是质点系中各质点在同一时刻的坐标 $z_{10}, z_{20}, \dots, z_{n0}$ 的集合。

因此, 质点系在任意时刻坐标分别为 z_1, z_2, \dots, z_n 时的势能为

$$V = \sum m_i g(z_i - z_{i0}) = mg(z_C - z_{C0})$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

势能的概念 机械能守恒定律及其应用

- 有势力和势能
- 有势力的功与势能的关系

根据势力的定义和功的概念, 可得到有势力的功和势能的关系

$$W_{12} = V_1 - V_2$$

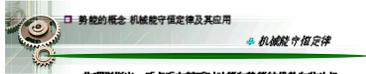
这说明有势力所作的功等于质点系在运动过程的起始位置与最终位置的势能差。这一关系可以更好地帮助理解功和势能的概念。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

势能的概念 机械能守恒定律及其应用

- 机械能守恒定律

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



机械能守恒定律

物理学指出，质点系在某瞬时动能和势能的代数和称为机械能。

当作用在系统上的力均为内保守力时，其机械能保持不变。这就是机械能守恒定律 (Theorem of conservation of mechanical energy)，其数学表达式为

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

事实上，在很多情况下，质点系会受到非保守力的作用，这时的系统称为非保守系统。在保守系统机械能定理中加上一附加项，就可以得到机械能之间的相互关系

$$T_2 - T_1 = W - V_2 + V_1$$

$$(T_2 + V_2) - (T_1 + V_1) = W$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



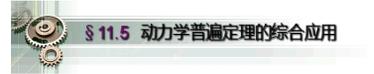
事实上，在很多情况下，质点系会受到非保守力的作用，这时的系统称为非保守系统。在保守系统机械能定理中加上一附加项，就可以得到机械能之间的相互关系

$$T_2 - T_1 = W - V_2 + V_1$$

$$(T_2 + V_2) - (T_1 + V_1) = W$$

其中 W 为非保守力的功。例如系统上除了保守力外还有摩擦力， W 就是摩擦力的功。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



§ 11.5 动力学普遍定理的综合应用

能量定理、动量矩定理与动量定理统称为动力学普遍定理。

动力学的三个定理包括了矢量方法和能量方法。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



动力学普遍定理的综合应用

动量定理给出了质点系动量的变化与外力主矢之间的关系，可以用于求解质心运动或外力。

动量矩定理描述了质点系动量矩的变化与外力主矩之间的关系，可以用于具有转动特性的质点系，求解角速度等运动量和外力。

动能定理建立了做功的力与质点系动能变化之间的关系，可用于复杂的质点系、刚体系求运动，应用动能定理和动量矩定理时，质点系不必为质点系的内力，应用动能定理时，外力主矩做功的力为功，因而不必考虑。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



在很多情况下，需要综合应用这三个定理，才能问题的解答。正确分析问题的性质，灵活运用这些定理，往往会达到事半功倍的作用。

另外，这三个定理都存在不同形式的守恒形式，也要给予特别的重视。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



例题 8

均质圆轮 A、B 的质量均为 m ，半径均为 r ，轮 A 沿斜面作纯滚动，轮 B 作定轴转动，B 处摩擦不计。物块 C 的质量也为 m ，A、B、C 用无质量绳相联，绳相对 B 轮无滑动。系统初始为静止状态。

问:

1. 轮 A、轮 B 之间的绳子拉力取处的约束力；
2. 轮 A 与地面的接触点处的摩擦力。

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



解: 1. 确定绳子拉力

本例的条件与例题 8 相同，在例题 8 中已求得

$$a_c = a_1 = \frac{g}{6}$$

$$a_c = R\alpha_B \quad \alpha_A = \frac{a_c}{R}$$

取轮 B 和物块 C 为研究对象，分析受力，对点应用动量定理，有

$$\frac{d(J_B \alpha_B + m_B v_C)}{dt} = m_B g R - F_1 R$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



取轮 B 和物块 C 为研究对象，分析受力，对点 B 应用动量定理，有

$$\frac{d(J_B \alpha_B + m_B v_C)}{dt} = m_B g R - F_1 R$$

$$\left(\frac{J_B}{R} + m_B\right) a_c = m_B g R - F_1 R$$

由此解得

$$F_1 = m g - \left(\frac{J_B}{R^2} + m\right) a_c = m g - \frac{3}{2} a_c = \frac{5}{4} m g$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>



解: 2. 确定 B 轮的约束力

对图示系统应用质心运动定理，有

$$\begin{cases} m_A a_{Ax} + m_B a_{Bx} = F_1 - F_2 \cos 30^\circ \\ m_A a_{Ay} + m_B a_{By} = F_1 \cos 60^\circ - m_A g - m_B g \\ 0 = F_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -m_C = F_2 - \frac{1}{2} F_1 - 2m g \end{cases}$$

由此解得 B 轮的约束力

$$\begin{cases} F_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} m g = \frac{3\sqrt{3}}{8} m g \\ F_1 = \frac{1}{6} m g + \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} m g + 2m g = \frac{55}{24} m g \end{cases}$$

<http://blog.sina.com.cn/xhliuzhou>

“理论力学B”学生评教记录

序号	学期	开课单位	课程名称	教师工号	教师姓名	班级名称	评价时间	学生评教分数
1	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 22:32:20.0	100
2	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 14:53:10.0	100
3	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 13:33:40.0	100
4	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 15:04:25.0	100
5	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 12:57:11.0	100
6	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 17:31:29.0	100
7	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:44:52.0	100
8	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 17:19:48.0	100
9	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 18:47:16.0	100
10	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 14:56:55.0	100
11	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-09 22:24:56.0	100
12	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 17:49:12.0	100
13	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 14:32:10.0	100
14	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 15:16:29.0	100
15	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 17:48:24.0	100
16	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 15:48:55.0	100
17	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-09 19:50:37.0	100
18	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 15:18:46.0	100
19	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 16:11:58.0	100
20	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 18:04:40.0	100
21	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:25:05.0	100
22	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 14:10:19.0	100
23	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:40:27.0	100
24	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:10:54.0	100
25	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 16:48:43.0	100
26	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 15:22:14.0	100
27	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 16:36:36.0	100
28	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 14:49:55.0	100
29	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 14:28:56.0	100
30	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 18:49:57.0	100
31	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-09 16:33:04.0	100
32	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 13:58:02.0	100
33	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 17:00:22.0	100
34	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 19:32:18.0	100



序号	学期	开课单位	课程名称	教师工号	教师姓名	班级名称	评价时间	学生评教分数
35	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 14:53:24.0	100
36	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-09 18:02:10.0	100
37	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 15:14:58.0	100
38	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 15:17:55.0	100
39	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 15:25:13.0	100
40	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 11:52:24.0	100
41	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 12:36:35.0	100
42	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 15:55:39.0	100
43	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:10:54.0	100
44	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 14:11:30.0	100
45	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 17:47:31.0	100
46	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 22:43:05.0	100
47	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 14:30:40.0	100
48	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 15:25:52.0	100
49	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-09 17:25:23.0	100
50	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 18:21:57.0	100
51	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-09 17:42:17.0	100
52	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 18:22:15.0	100
53	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-23 09:50:35.0	100
54	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 18:56:54.0	100
55	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-25 12:33:42.0	100
56	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 18:30:36.0	100
57	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 18:50:02.0	100
58	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 17:30:16.0	100
59	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 12:15:29.0	100
60	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-09 17:51:40.0	100
61	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 18:58:07.0	100
62	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:10:05.0	100
63	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:12:26.0	100
64	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:15:13.0	100
65	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 14:38:04.0	100
66	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 21:28:40.0	100
67	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-09 18:09:51.0	100
68	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-23 22:28:39.0	100
69	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:24:22.0	100



序号	学期	开课单位	课程名称	教师工号	教师姓名	班级名称	评价时间	学生评教分数
70	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 12:02:18.0	100
71	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 12:23:28.0	100
72	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 13:15:26.0	100
73	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 15:21:18.0	100
74	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 17:17:46.0	99.9
75	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 16:05:26.0	99.9
76	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:34:59.0	99.9
77	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 16:42:23.0	99.9
78	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 16:11:24.0	99.9
79	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 13:19:58.0	99.9
80	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 11:58:47.0	99.9
81	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 15:17:46.0	99.8
82	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 17:52:24.0	99.8
83	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 12:04:02.0	99.8
84	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 15:36:31.0	99.8
85	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 12:00:56.0	99.8
86	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:16:23.0	99.8
87	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-09 18:11:08.0	99.7
88	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 14:43:41.0	99.6
89	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:39:12.0	99.6
90	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:09:53.0	99.4
91	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 20:05:53.0	99.2
92	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 11:59:05.0	99
93	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 19:57:49.0	98.9
94	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 12:39:21.0	98.9
95	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 18:59:51.0	98.8
96	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 16:04:12.0	98.7
97	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 17:48:00.0	98.5
98	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 12:00:44.0	98.4
99	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 11:51:51.0	98.2
100	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 16:04:19.0	98.1
101	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 18:21:15.0	97.9
102	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 13:29:12.0	97.5
103	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 13:20:42.0	97.5
104	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 14:57:52.0	97.4

海大 2021年12月15日

序号	学期	开课单位	课程名称	教师工号	教师姓名	班级名称	评价时间	学生评教分数
105	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:29:59.0	97.3
106	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 12:40:38.0	97.2
107	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 17:59:59.0	96.2
108	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 12:19:23.0	96
109	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 15:17:58.0	96
110	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 17:51:11.0	95.8
111	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-09 18:10:31.0	95.7
112	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 17:25:12.0	95.6
113	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 11:45:26.0	95.5
114	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 11:58:28.0	95.4
115	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 15:00:24.0	95.2
116	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 15:13:20.0	95.2
117	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计193	2020-12-08 19:09:50.0	94.9
118	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 12:39:57.0	94.6
119	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 18:56:23.0	94.4
120	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 15:24:32.0	94.3
121	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计192	2020-12-08 14:43:36.0	94.2
122	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 12:49:42.0	93.1
123	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 17:52:31.0	93
124	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 16:28:21.0	92.6
125	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:10:44.0	92.6
126	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计194	2020-12-08 13:19:23.0	92
127	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 18:21:48.0	90.4
128	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机器人工程192	2020-12-08 17:50:39.0	90
129	2020-2021-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计191	2020-12-08 15:11:03.0	90
学期平均分								98.69

序号	学期	开课单位	课程名称	教师工号	教师姓名	班级名称	评价时间	学生评教分数
1	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-14 21:50:36.0	100
2	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-14 10:34:36.0	100
3	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-20 18:28:15.0	100
4	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-12-19 20:38:02.0	100
5	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-13 07:57:23.0	100
6	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-12-20 12:21:37.0	100
7	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-15 12:40:11.0	100

序号	学期	开课单位	课程名称	教师工号	教师姓名	班级名称	评价时间	学生评教分数
8	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-13 15:50:09.0	100
9	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-14 13:07:09.0	100
10	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-20 13:45:42.0	100
11	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-16 20:21:26.0	100
12	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-14 15:02:00.0	100
13	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-15 12:07:12.0	100
14	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-12-20 21:53:03.0	100
15	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-14 19:31:56.0	100
16	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-14 10:26:07.0	100
17	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-12-19 20:35:50.0	100
18	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-14 09:59:24.0	100
19	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-15 21:32:52.0	100
20	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-14 14:43:25.0	100
21	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-20 13:36:13.0	100
22	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-14 20:42:28.0	100
23	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-16 20:07:11.0	100
24	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-14 19:33:54.0	100
25	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-14 21:05:39.0	100
26	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-16 19:56:47.0	100
27	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-13 08:16:10.0	100
28	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-14 11:01:16.0	100
29	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-14 14:18:05.0	100
30	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-12-19 16:09:59.0	100
31	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-14 10:24:02.0	100
32	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-14 15:52:00.0	100
33	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-14 13:54:54.0	100
34	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-12 21:24:06.0	100
35	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-16 20:02:15.0	100
36	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-14 20:41:59.0	100
37	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-14 10:32:32.0	100
38	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-20 23:25:04.0	100
39	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-14 09:59:06.0	100
40	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-12-20 11:22:33.0	100
41	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-14 13:53:42.0	99.9
42	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-13 08:42:39.0	99.8

序号	学期	开课单位	课程名称	教师工号	教师姓名	班级名称	评价时间	学生评教分数
43	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-15 15:32:53.0	99.7
44	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-12-19 18:31:30.0	99.7
45	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-13 14:28:55.0	99.5
46	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-14 10:45:02.0	99.1
47	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-14 19:32:52.0	99
48	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-14 13:29:01.0	99
49	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-12-20 08:44:55.0	98.7
50	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-14 13:41:46.0	98.7
51	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-13 13:01:18.0	98.7
52	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-14 10:34:21.0	98.5
53	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-12-20 21:44:03.0	98.1
54	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-12-20 11:07:47.0	97.9
55	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-14 10:41:00.0	97.9
56	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-11-12 14:58:09.0	97.7
57	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-14 10:16:09.0	97.5
58	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计183	2019-12-20 18:56:09.0	97.5
59	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-16 15:21:41.0	97.3
60	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-12-20 21:35:41.0	96.9
61	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-14 14:51:17.0	96.3
62	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-14 14:10:03.0	95.9
63	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-13 14:14:44.0	93.7
64	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计182	2019-11-14 19:22:36.0	93
65	2019-2020-1	机械工程学院	理论力学B	199701001	刘舟	机械设计181	2019-11-14 10:07:45.0	92.2
学期平均分								98.60



西安航空学院课堂教学质量评价表（普通课）

督导、领导、同行听课用表

20 20 -20 21 学年第 1 学期

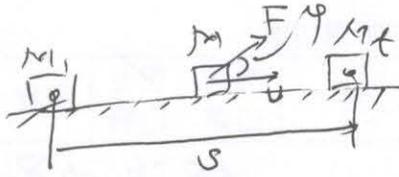
任课教师	刘舟	类别: <input checked="" type="checkbox"/> 专 <input type="checkbox"/> 兼 <input type="checkbox"/> 聘	职称	教授	开课单位	机械工程学院	
课程名称	理论力学B						
授课题目	动能定理						
授课时间	2020年11月19日 星期 第3小节			授课地点			2班 D1327
授课班级	机械设计194		应到学生: 30 实到学生: 30		到课率: 100%		
一级指标	二级指标				分值	得分	
教学态度 (20分)	1. 爱岗敬业, 为人师表, 师德师风良好。				10	10	
	2. 仪态端庄大方, 言行文明。				2	2	
	3. 教案书写认真规范, 教学资料齐全。				2	2	
	4. 严格要求, 善于管理。				3	3	
	5. 遵守教学规章制度, 按时上下课。				3	3	
教学内容 (30分)	1. 概念准确, 重点突出, 条理清晰。				10	10	
	2. 教学组织合理, 内容充实, 深度、广度适宜。				10	10	
	3. 内容娴熟, 能脱稿讲解。				10	10	
教学方法 (20分)	1. 结合课程特点, 发挥课程育人价值, 引导学生树立正确的世界观、人生观和价值观。				4	4	
	2. 普通话教学, 语言生动流畅, 富有激情。				4	4	
	3. 板书工整、规范, 合理应用多媒体课件。				4	4	
	4. 因材施教, 教学方法灵活多样, 善于利用信息化教学手段。				4	4	
	5. 注重师生互动, 善于理论联系实际。				4	4	
教学效果 (30分)	1. 教学体现 OBE 理念 (基于学习产出的教育模式)。重点关注学生学习效果, 根据反馈调整教学方法, 促进学生达成毕业目标。				10	9	
	2. 能够调动学生学习的主动性、积极性。				10	10	
	3. 课堂纪律好, 气氛活跃, 学生能够认真听讲, 积极思考, 大胆发言。				10	10	
总分					100	99	

听课记录

动能定理

一. 力的功
 $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

单位: $1W = 1J/s = 1N \cdot m/s$



二. 常见力的功

(一) 重力功: $\sum W_{i2} = \sum m_i g (s_{i1} - s_{i2})$

(二) 弹性力功: $W = \frac{1}{2} k (s_1^2 - s_2^2)$

(三) 定轴转动刚体上作用力功: $W_{i2} = M_2 (\varphi_2 - \varphi_1) = M_2 \Delta \varphi$

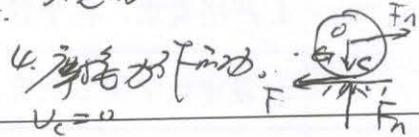
(四) 质点系内力功: 不一定为零。

(五) 约束反力功之和: 等于零。

1. 光滑面、铰链。



2. 不可伸长的绳子。 3. 光滑活动铰链



总体评价

在授课中, 板书指导与PPT互相结合的电子课程环环相扣
 自如, 有好些玲能顺稿讲解, 板书整齐整洁, 黑板色位恰当
 合理, 在板书中有-定的讲解是改内容无痕融入, 课堂互动
 注重学习效果, 并及时通过互动, 调整教学节奏和教学性质, 有许
 多有讲解, 对学生三训有-定的启发和反馈。

问题与建议

无

是否与授课教师沟通交流: 是 否

是否与学生沟通交流: 是 否

听课人类别: 校领导 职能部门领导 院(部)领导 教研室主任 教师

听课人单位: 机械工程学院 教研室: 主研组

听课人(签字): 吕晓亭



学校政治审查意见

“理论力学B”申报本次省级线下一流课程，课程内容及上传的申报材料无危害国家安全、涉密及其他不适宜公开传播的内容，思想导向正确，不存在思想性问题。

该课程负责人及成员遵纪守法，无违法违纪行为。不存在师德师风问题、学术不端等问题，五年内未出现过重大教学事故。

中国共产党西安航空学院委员会

2021年5月15日



学校教学工作委员会对课程的评价意见

“理论力学 B”课程遵循学校办学定位和人才培养理念，在专业人才培养方案中对学生培养目标的定位准确，重视学生分析和解决工程实践问题能力的提高，培养学生工程素养、责任意识、严谨求实的职业道德和勇于探索的科学精神。

理论力学是研究物体机械运动一般规律的科学，是众多工程技术学科的基础。课程培养学生的建模能力、逻辑思维能力、分析创新能力，其课程建设、教学改革和教学效果的好坏将直接影响到后续课程的学习及工程技术人才培养的质量。课程团队教师通过团结协作提高教学基本功，合理使用现代教育技术，激发学生学习的积极性，在专业课程教学方面达到协同育人成效。课程整体上符合线下一流课程的建设标准。同意推荐“理论力学 B”课程参评线下一流课程。

西安航空学院教学工作委员会

2021年5月15日

委员签字：

